

발 간 등 록 번 호

31-9700230-000478-14

경제정책의 효과 분석을 위한 동태확률적 일반균형 모형

백용기 · 황종률

2009. 2



국회예산정책처
National Assembly Budget Office

발간등록번호: 31-9700230-000478-14

ISBN : 978-89-6073-178-3 93350

경제정책의 효과 분석을 위한 동태확률적 일반균형 모형

백웅기 · 황종률

2009. 2



국회에산정책처
National Assembly Budget Office

이 보고서는 국회예산정책처법 제3조의 규정에 의거 작성되었으며,
국회예산정책처 홈페이지(www.nabo.go.kr)를 통해 보실 수 있습니다.

발 간 사

최근 우리경제는 글로벌 경제위기로 촉발된 세계경기 침체의 여파로 인하여 민간소비와 투자는 물론이고 수출마저 큰 폭으로 감소하는 등 큰 어려움에 직면해 있습니다. 이에 따라 정부는 경제위기를 극복하고자 재정 및 통화정책을 적극적으로 집행하고 있습니다.

그러나 기준금리 인하로 요약되는 확장적 통화정책만으로는 위기 극복에 한계가 있기 때문에 지금은 어느 때보다 재정정책의 중요성이 강조되고 있는 시기입니다. 이에 국회예산정책처는 통화정책뿐 아니라 조세 및 재정지출 변화 등 각종 재정정책의 전과경로와 효과를 심도 깊게 분석하려고 노력하고 있습니다.

지금까지 경제정책의 효과분석에 주로 활용되던 경제모형은 경제주체의 최적화 행태, 미래에 대한 합리적 기대, 시장의 불완전성 등을 충분히 고려하지 못하기 때문에 분석결과의 신뢰성에 관해 많은 비판이 제기되어 왔습니다. 그러나 최근 경제학의 눈부신 발전에 힘입어 이러한 한계점을 극복할 수 있는 동태확률적 일반균형(Dynamic Stochastic General Equilibrium, DSGE)모형이 탄생했으며, 세계의 유수한 기관들은 이미 DSGE 모형을 경제전망 및 정책효과분석에 활용하고 있습니다.

이러한 추세에 발맞추어 우리 처는 우리나라의 경제구조 및 정책수단을 잘 반영한 DSGE 모형을 개발함으로써 경제정책의 효과분석을 수행하고 경제전망에 활용할 수 있는 역량을 갖추고자 노력해왔으며 그 일환으로 본 보고서를 발간하게 되었습니다.

국회예산정책처는 전문성과 객관성을 갖춘 양질의 보고서를 제공하고자 최선을 다할 것이며, 앞으로도 우리 처에 대한 의원님들의 격려와 성원을 부탁드립니다.

2009년 2월

국회예산정책처 처장 신 해 룡

목 차

요약 / 3

I. 서론 / 15

II. DSGE모형의 근사화와 모형의 해(解) / 23

- 1. 선형화(Linearization) 26
- 2. 모형의 해(解)(Solution Methods) 31

III. 실물경기변동모형(RBC MODEL) / 51

- 1. RBC 모형의 구조 52
- 2. 해(解)의 선형근사화 58

IV. 신케인지언 DSGE 모형 / 63

- 1. 가격이 신축적인 일반균형모형에서의 화폐의 역할 64
- 2. 명목가격의 경직성 84
- 3. 신케인지언 DSGE모형을 이용한 통화정책분석 93

VI. 결론 및 시사점 / 119

- [참고문헌] 123

요약

요 약

I. 서 론

- 전통적인 모형은 미래를 고려한(forward-looking) 경제주체의 의사결정 과정이나 일반균형에 대한 체계적인 접근이 부재
 - 루카스 비판(Lucas Critique)이 지적한 것처럼 경제이론에 따르면 정책준칙이 변화함에 따라 경제주체의 결정과 기대형성 방식 또한 변화하므로 전통적인 모형에 기초한 정책효과 분석 및 예측이 무용
 - 이후 많은 연구자들이 합리적 기대와 미래에 대한 고려에 기초한 소규모 모형을 이용하여 분석을 시도
- Kydland and Prescott(1982) 이후 등장한 RBC 모형은 DSGE 모형에 기초한 실증분석의 방법론적인 모든 특성을 제공
 - DSGE 모형체계 하에서는 경제주체의 미래를 고려한 행태와 외생변수의 확률행태가 경제주체가 결정하는 내생변수의 확률행태에 직접적인 영향을 줌
 - DSGE모형이 이전의 실증계량모형에서 구체적인 함수형태에 일정한 제약을 가하는 간접적인 역할에 머무르지 않고 직접적으로 이론적 모형에 기초해 실증분석을 행할 수 있는 틀이 됨
- DSGE 모형의 해는 비선형 기대차분방정식체계 또는 일계조건, 오일

러 방정식 등으로 요약할 수 있음

- 그러나 복잡한 비선형 차분방정식에 대한 명시적인 해(analytical solution)를 구하기는 거의 불가능하므로, 이에 기초한 실증분석이 가능하기 위해서는 이를 분석 가능한 형태로 근사시키는 것이 필요
- 전환된 모형은 다양한 방법을 이용해 모형의 모수를 추정하고, 추정된 모형이 현실의 데이터를 잘 설명하는지 비교하고, 미래를 예측하고, 정책효과를 분석하는 데 사용할 수 있음

□ 주어진 DSGE 모형을 실증분석이 가능한 방정식체계로 전환시키는 과정은 크게 두 단계로 요약할 수 있음

- 첫 단계는 DSGE모형을 선형근사시키는 것이고, 두 번째 단계는 선형근사화된 모형의 해를 구하는 것임
- 물론 DSGE 모형을 비선형 모형으로 근사시키는 다양한 방법 또한 존재하며, projection method, value-function iteration, policy-function iteration과 같은 방법론들이 대표적인 것임

□ 상태공간형태로 표현된 DSGE모형을 가지고 다양한 실증분석이 가능하기 위해서는 우선 모형 안의 구조적 모수가 추정되어야 함

- 단순한 캘리브레이션에서 출발한 DSGE 모형의 실증분석 방법은 GMM(Generalized Method of Moment), SMM(Simulated Method of Moment)과 같은 모수추정 방법론이 도입되거나 모형의 상태공간형태(State-space Representation)에 칼만필터를 이용한 최우도추

정법(Maximum Likelihood Estimation)을 적용하기도 함

- 최근에는 베이지언 기법을 이용한 추정 등도 보편화 되면서 점차 모수 추정과 모형평가 방법들이 정치화되고 있음

- 본고에서는 기본적인 RBC모형과 신케인지언 DSGE 모형을 개관하고, 일계조건으로 표현된 복잡한 비선형차분방정식을 선형근사시켜 다양한 방법으로 해를 구하는 과정을 개관함

II. DSGE 모형의 근사화와 모형의 해(解)

- DSGE 모형을 근사화하는 방법은 크게 세 가지로 나눌 수 있음
 - 선형근사, 로그선형근사, 비선형근사임
 - 선형 근사화된 모형의 해는 변수들의 상태공간(a state-space representation) 형태를 취하며, 여러 가지 해를 구하는 방법이 이용가능하나 대표적으로는 Blanchard and Kahn's method, Sim's method, Klein's method, Undetermined coefficients approach (Ulig(1999))을 들 수 있을 것임
 - 비선형근사법에는 projection methods, value-function iterations, a policy function iterations 등이 대표적이며 선형근사처럼 모형안의 변수들 간의 명시적 함수형태를 알 수 없으므로 변수들의 확률적인 성질을 추출하기 위해서는 시뮬레이션 기법에 의존해야 함
- 본장에서는 첫째, DSGE모형의 해인 비선형기대차분방정식체계를 선형체계로 바꾸는 과정과 둘째, 주어진 선형체계 하에서 실증분석이

가능한 방정식 체계로 변환시키는 방법들에 관해서 살펴보고자 함

III. 실물경기변동모형 (Real Business Cycle Model)

- RBC 모형의 기초는 Ramsey(1928)와 Solow(1956)의 신고전학과 성장 이론으로써 현대 거시경제학의 기본적인 토대를 제공하고 있음
 - Solow의 성장모형은 세 가지 주요 요소는 (i)노동과 자본 간 대체가 가능한 생산함수, (ii) 산출량의 일부분이 매기마다 투자되어 자본으로 축적되는 과정(capital accumulation process), (iii) 외생적으로 주어진 증가율에 따라 늘어나는 노동공급(labor supply process) 등임
 - RBC 모형은 신고전학과 성장모형에 노동과 여가의 trade-off와 기술적 진보에 대한 불확실성을 더한 것이라고 할 수 있을 것임
 - Kydland and Prescott(1982)의 RBC 모형이 본래 의도한 것은 시장의 불완전성이 없고 가격이 완전히 신축적이라고 가정하고, 장기적 경제성장의 중요한 현상을 설명하는 신고전학과 성장이론의 틀 안에서 단기적 경기변동이 얼마나 잘 설명될 수 있는지 살펴보는 것이었음
- 본장에서는 RBC 모형의 기본구조를 간단한 모형의 예로 살펴보고 이를 선형근사화하고 해를 구하는 과정에 대해서 설명함

IV. 신케인지언 DSGE 모형

- 신케인지언 DSGE모형을 설명하기에 앞서 우선 일반균형모형에서 화폐가 도입되는 과정을 효용함수에 화폐를 직접 도입한 MIU(Money in Utility) 모형을 중심으로 살펴봄
- 화폐를 일반균형모형에 도입하기 위해 주요 두 방향으로 접근이 이루어짐
 - 첫째는 화폐가 직접적인 효용을 가져온다고 가정하고 경제주체의 효용함수에 화폐잔고를 직접 도입한 Sidrauski(1967)의 MIU 모형이고,
 - 둘째는 거래비용이 존재함으로써 이를 줄이기 위해 화폐 수요가 존재하는 가정하는 Cash-in-advance (CIA)모형임
- 제 1절에서는 가격과 임금이 완전히 신축적이라고 가정한 일반균형 모형에서 화폐가 가지는 역할에 대해서 살펴봄
 - MIU모형에서 구체적인 함수형태를 가정하고 주요 변수의 동학을 살펴보고 모형의 해를 구하는 방법에 대해서 살펴봄
 - 모형에서 유도된 정상균형의 성격과 모형이 불확실성, 노동과 여가의 선택, 그리고 변동하는 고용이 존재하는 확률적 모형으로 확대되었을 때 함의하는 거시경제변수의 동태적 성격을 알아봄
- 현재까지 실증분석 결과들은 요약해 보면 양(+)의 화폐 충격이 발생했을 경우 산출량에는 역U자 모형의(hump-shaped) 양(+)의 반응이 존

재하는 것으로 나타나며, 화폐적 충격이 실물에 영향을 주는 채널을 설명해야 함

- 신축적 가정 하의 MIU 모형에서는 인플레이션이 실질산출량에 영향을 미치며, 이는 기대인플레이션율의 변화와 이에 따른 실질화폐잔고와 소비와의 대체효과에 기인한 것임
- 그러나 시뮬레이션을 통해 보면 대체효과에 기인하는 산출량의 변화는 실증적인 여러 가지 증거를 통해서 본 통화충격의 실물효과를 설명하기에는 너무 작은 것으로 나타남
- 이에 따라 인플레이션이 가지는 조세효과 분석으로부터 벗어나 정책변화에 따른 실질이자율변화와 이에 따른 소비결정의 변화에 주목할 필요가 있음

□ 앞선 모형에서는 신축적 가격과 개인의 최적화 행동에 기반을 둔 일반균형의 틀 안에서 문제를 분석하였다면, 제3절에서는 명목가격의 경직성과 개인의 최적화 행동에 기반을 둔 일반균형의 틀 안에서 통화정책의 당면한 문제를 분석하는 모형을 살펴봄

- 명목가격과 임금이 유연하다는 가정을 유지하고서 화폐의 실질효과를 분석하는 모형을 간단히 요약하고,
- 명목 가격과 명목임금이 경직적일 때 통화충격과 통화정책이 실물경제에 어떻게 영향을 미치는지 기본적인 신케인지언 DSGE모형을 통해 살펴봄

□ 가격의 유연성 가정을 유지한 채 화폐의 실질효과를 설명하기 위해서 두 가지 접근법이 주로 이용됨

- 첫째는 경제전체의 상황에 대한 잘못된 이해(misconception)에 따른 정보효과에 주목하는 것이고(Lucas, 1972),
 - 둘째는 금융시장에서의 거래제약에 따른 효과에 주목하는 것임. 즉, 빠른 통화증가율이 단기적으로는 유동성 효과(liquidity effect)를 통해 명목이자율이 하락하여 확장적인 통화정책이 실질소비, 투자, 산출량에 영향을 미침
- 그러나 대부분의 거시모형은 명목임금과 명목가격의 경직성으로 통화충격의 효과를 설명하고자 함
- 즉, 명목통화량의 변화에 명목임금과 명목가격이 즉각적이고 완전하게 조정되지 못하는 데서 통화충격의 단기적인 실질효과가 발생
 - 최근에는 명목가격경직성과 독점적 경쟁시장에 직면한 경제주체의 최적화 결정 문제를 명시적으로 고려한 모형으로 통화정책의 효과를 분석하는 것이 주류를 형성
- 본 보고서에서는 가계는 MIU, 기업은 독점적 경쟁 시장과 명목가격의 경직성에 직면한 간단한 신케인지언 DSGE모형의 예를 통해서 모형의 해(Solution)를 구하고 시뮬레이션을 행하는 과정을 살펴봄
- 모형에서 가계는 소비하고, 노동을 공급하며, 현금과 유가증권을 보유하며 예산제약 하에서 무한기에 걸친 기대효용의 할인된 현재가치를 극대화하도록 소비와 노동공급량, 현금과 유가증권보유량을 결정하는 경제주체이고,

- 기업은 이용 가능한 생산기술(생산함수), 수요함수, 명목가격경직성(Nominal Price Rigidity), 그리고 노동공급함수 하에서 무한기에 걸친 기대이윤의 할인된 현재가치를 극대화하도록 생산량을 결정하는 경제주체이며,
 - 정책당국은 테일러준칙을 사용하여 원하는 명목이자율을 달성하기 위해 명목통화량을 결정
- 우선 가계의 최적화 조건으로부터 경제전체의 수요측면을 대표하는 동태방정식인 dynamic IS-curve 혹은 forward-looking IS curve의 로그 선형근사식을 유도할 수 있음
 - 또한 명목가격경직성이 존재하는 시장에서 기업의 최적가격결정식으로부터 경제의 총공급측면을 설명하는 신케인지언 필립스곡선(New Keynesian Phillips Curve, NKPC)을 유도할 수 있음
 - 만약 통화정책당국이 테일러형태(Taylor-type)의 간단한 준칙을 통해서 명목이자율을 정한다고 가정하면, 위의 두 방정식과 함께 세 개의 방정식을 가진 체계를 구성할 수 있음
 - 이렇게 구성된 일반화된 선형 합리적 기대모형(generalized linear rational expectation models)은 앞에서 설명한 여러 방법을 이용하여 해를 구하고, 이를 토대로 통화정책충격에 따른 시뮬레이션을 행할 수 있음. 이를 통해
 - 첫째는 가상의 자료를 만들어 현실에서 확립된 사실들(stylized facts)과 비교할 수 있음. 즉, 가상의 자료를 통해 본 분산, 공분산, 상관관계, 자기상관 등을 현실의 자료에서 나온 것과 비교할 수 있는 것임

- 둘째는 경제에 여러 가지 다른 성격의 외생적인 충격에 대한 반응함수(Impulse Response Functions, IRF)를 볼 수 있고,
- 셋째는 주요 변수의 예측오차 분산 분석을 통해서 변동의 주요 요인(Forecast Error Variance Decomposition, FEVD)을 분석해 볼 수 있음

V. 결론 및 정책적 시사점

- DSGE모형은 이제 더 이상 실증분석모형에 이론적 기초를 제공하는 데 머무르지 않고 다양한 정책분석과 예측 등의 정량적 분석을 위한 중요한 도구로 자리 잡음
- 이렇게 DSGE모형이 거시경제실증분석의 핵심방법론으로 등장할 수 있었던 중요한 요인은 크게 세 가지로 요약할 수 있음
 - 첫째는 동태적 일반균형모형이 가지는 풍부한 구조이며
 - 둘째는 모형에 적합하고 쉽게 근사화하여 해(解)를 구할 수 있는 다양한 방법이 개발되었으며
 - 마지막으로 정치화된 추정방법과 효율적이고 강력한 시뮬레이션 기법 등이 결합되어 설명력과 예측력이 크게 향상되었다는 점임
- 지금까지 DGSE모형은 주로 통화정책의 효과분석과 경제전망에 활용됨
 - 세계 주요국의 중앙은행들은 다양한 DSGE 모형을 개발하여 통화정책을 결정하기 위한 주요한 수단으로 활용하고 있으며,

- 한국은행도 지난 2007년 한국은행의 DSGE(BOKDSGE) 모형을 개발하였고, 2009년 들어서는 DSGE모형에서 도출된 구조식과 시계열 방법을 이용한 행태식을 결합하여 경제전망에 활용할 수 있는 일종의 혼합형 DSGE모형인 BOKDPM(BOK Dynamic Projection Model)를 내놓음
- 그러나 경기변동을 일으키는 다른 하나의 중요한 정책충격이 재정정책임
 - 따라서 여러 가지 충격과 그 전과경로를 DSGE 모형에 도입하여 정책효과분석에 활용하고, 가장 중요하게는 재정정책 효과를 분석하고 예측하는 모형을 개발하는 데 노력을 경주해야 할 것임
- 이를 위해서는 우선 우리 경제의 주요 거시경제변수들을 잘 설명할 수 있는 기본적인 DSGE 모형을 개발하고,
 - 이를 확장하여 우리나라의 조세구조와 정부지출구조를 잘 반영하는 모형으로 발전시켜 일반균형의 풍부한 틀 안에서 재정정책 효과와 전과경로를 분석하는 데 활용할 수 있는 방향으로 나아가야 할 것임

I

서론

I. 서론

거시경제현상을 분석하기 위해 사용하는 전통적인 모형에는 통계적 특성에 기초한 축약형 모형이나 연립방정식체계 모형이 있다. 그러나 루카스 비판이 지적한 것처럼 경제이론에 따르면 정책준칙이 변화함에 따라 경제주체의 투자, 소비 등에 대한 결정과 기대형성 방식 또한 변화하므로 전통적인 모형에 기초한 정책효과 분석 및 예측이 무용하게 된다. 그러나 전통적인 모형은 미래를 고려한(forward-looking) 경제주체의 의사결정과정이나 일반균형에 대한 체계적인 접근이 부재한 것으로 평가된다.

루카스 비판 이후 많은 연구자들이 합리적 기대와 미래에 대한 고려에 기초한 소규모 모형을 이용하여 분석을 시도하였다. 그 대표적인 모형이 Sims(1972)의 VAR(Vector Autoregression) 모형이나 Hansen and Sargent(1980)의 선형기대방정식 모형의 방법론에 기초한 실증모형이라고 할 수 있을 것이다. 소규모 모형에 기초한 실증분석의 방법의 가장 중요한 기본 원리는 경제적 이론에 바탕을 둔 제약을 축약형 모형에 가하는 것으로, 제약은 보통 “cross-equation restrictions”의 형태를 취한다. 이러한 이론적 제약의 원천이 되는 이론이 바로 동태확률적 일반균형(Dynamic Stochastic General Equilibrium, DSGE) 모형이다. DSGE 모형체계 하에서는 경제주체의 미래를 고려한 행태와 외생변수의 확률행태(stochastic behavior)가 경제주체가 결정하는 내생변수의 확률행태에 직접적인 영향을 주게 된다.

고전적인 성장모형에 경제주체의 합리적 의사결정과정과 기술적 진보의 확률적 과정을 결합시킨 Kydland and Prescott(1982)의 논문은 DSGE모형이 이전의 실증계량모형에서 구체적인 함수형태에 일정한 제약을 가하는 간접적인 역할에 머무르지 않고 직접적으로 이론적 모형에

기초해 실증분석을 행할 수 있는 틀이 될 수 있는 가능성을 열어 놓았다. 즉, Kydland and Prescott(1982) 이후 등장한 실물적 경기변동이론(Real Business Cycle, RBC)모형은 DSGE 모형에 기초한 실증분석의 방법론적인 모든 특성을 제공하였으며 이후 등장한 신케인지안 DSGE 모형의 토대가 되었다고 할 수 있다. 여기에서는 DSGE 모형에 기초한 실증분석의 방법론에 대해 개관해 보고자 한다. 본론으로 들어가기에 앞서 우선 DSGE 모형에 기초한 실증분석이 행해지는 단계를 개략적으로 살펴보자.

DSGE 모형의 해는 비선형 기대차분방정식체계 (혹은 일계조건이나 오일러 방정식)으로 요약될 수 있다. 그러나 복잡한 비선형 차분방정식에 대한 명시적인 해를 구하기란 거의 불가능하다. 이에 기초한 실증분석을 수행하기 위해서는 이를 분석 가능한 형태로 근사시키는 것이 필요하다. 즉, 주어진 DSGE 모형을 실증분석이 가능한 방정식체계로 전환해야한다. 전환 모형은 일단 다양한 방법을 이용해서 모형의 모수를 추정하고, 추정된 모형이 현실 데이터를 잘 설명하는지 여부를 검증한 후에야 경제전망이나 정책효과 분석에 활용할 수 있다.

주어진 DSGE 모형을 실증분석이 가능한 방정식체계로 전환시키는 과정은 크게 두 단계로 요약할 수 있다. 첫 단계는 DSGE모형을 선형으로 근사시키는 것이고, 두 번째 단계는 선형근사화된 모형의 해를 구하는 것이다. 모형의 해는 모형에서 관측가능한 변수들로 구성된 상태공간형태(State-space Representation)를 취한다. 물론 DSGE 모형을 비선형 모형을 이용하여 근사시키는 다양한 방법 또한 존재한다. 예를 들면 projection method, value-function iteration, policy-function iteration과 같은 방법들이 대표적이라고 할 수 있다. 모형의 선형근사와 비선형근사의 가장 근본적인 차이는 비선형방법으로 모형을 근사시키기 위해서는 모형의 관련 변수들을 시뮬레이션 기법을 이용해 생성해내야 한다는

점이다. 이는 선형근사의 경우처럼 변수들의 관계에 대한 명시적인 함수 형태가 존재하지 않기 때문이다.

현실에 존재하는 다양한 형태의 자료를 DSGE 모형을 활용한 실증 분석에 이용하기 위해서는 우선 현실 자료를 모형에서 설명하는 변수 형태로 측정하고 가공하는 과정이 필요하다. 예를 들어 DSGE 모형을 이용해 경기변동을 파악하려고 한다면, 현실 변수에 존재하는 추세를 제거함으로써 모형 변수와 같은 통계적 특성을 가지도록 가공하는 것이 필요하다.

현실의 자료를 묘사하고 요약하기 위해서는 평균, 분산, 다른 변수와의 상관계수 등의 기초통계량과 함께 VAR 모형을 이용한 간단한 분석을 수행한다. VAR 모형을 이용하면 현실 변수들 간에 존재하는 다양한 통계적 특성과 관계를 쉽고 자세하게 파악할 수 있기 때문이다. 이러한 현실 변수의 특성은 DSGE 모형에서 동태적 균형상태 하의 관계를 나타내는 구조적 모수(structural parameter or deep parameter)를 추정하기 위해 사용되기도 하며 모형의 실증적 성과를 평가하는 기준으로 사용되기도 한다.

상태공간형태로 표현된 DSGE 모형을 가지고 다양한 실증분석을 수행하기 위해서는 우선 모형 내의 구조적 모수가 추정되어야 한다. 초기 RBC 모형에서는 구조적 모수값을 측정(혹은 캘리브레이션, calibration)했는데, 이 경우 모형의 균형상태에서 얻은 각 변수의 평균값을 사용하거나 다른 연구에서 얻은 추정값을 사용하기도 했다. 단순한 캘리브레이션에서 출발한 DSGE 모형의 실증분석 방법은 그 후 GMM(Generalized Method of Moment)이나 SMM(Simulated Method of Moment) 등의 모수 추정법, 모형의 상태공간형태에 칼만필터를 이용한 최우추정(MLE)법 등으로 발전되었으며, 최근에는 베이지언 기법을 이용한 추정방식이 보편화 되면서 점차 모수 추정과 모형평가 방식이 세련

되어 가고 있다.

캘리브레이션은 DSGE 모형의 가장 기본이 되는 실증분석 방식이다. Kydland and Prescott(1982)이 캘리브레이션 방식을 적용할 때의 당초 의도는 신고전학과 성장이론에 기초하여 장기적인 경제성장을 설명하기 위해 작성한 RBC 모형의 모수값이 단기적 경기변동의 특징을 어느 정도까지 설명할 수 있는지 파악해보려는 것이었다. 즉, 전통적인 모수추정의 방법으로 모수값을 계산하는 것이 아니라 주어진 자료의 일정한 특성이나 제약이 만족되도록 모수값을 정한 다음, 현실 자료의 특성이 모형이 시사하는 변수의 특성과 어느 정도까지 합치되는지 보려는 것이었다. 그러나 이것은 통계적 원리에 입각해 일정한 유의 수준 하에서 가설을 검정하는 고전적 모형 평가와는 전혀 다른 접근 방식이다.

모형의 모수값을 결정하기 위해 주로 사용되는 현실 변수들의 평균값에는 당연히 표준오차가 존재하며, 모형 내에 존재하는 모수의 수보다 이를 계산하기 위해 사용한 현실 변수의 수가 더 많다면 과다식별의 우려가 있다. 이를 고려하여 고전적 의미에서 모수추정을 시도한 것이 GMM과 SMM 추정법이다.

GMM이나 SMM을 이용한 모수추정법은 우선 DSGE 모형 내에 존재하는 확률 변수들에 대해 특정 분포를 가정하지 않아도 된다는 장점이 있다. 그러나 추정단계에서 어떤 변수를 사용할 것인가에 대한 선택이 임의적이고 추정결과도 이에 따라 민감하게 달라질 수 있다는 단점이 존재한다.

이렇게 GMM이나 SMM이 모형의 모수를 추정하는 데 있어 주어진 현실 자료를 전부 이용하지 않고 제한된 정보만을 이용하는 데 반해, 칼만필터를 적용하여 도출한 우도함수에 기초한 MLE 추정방법은 모형의 변수에 대한 확률분포를 가정하면 주어진 정보를 전부 이용할 수 있다는 장점이 있다.

DSGE 모형과 같은 최적화 이론에 기초한 구조모형의 가장 큰 특징 중의 하나는 모형 내의 모수에 대한 이론적 혹은 기존의 연구결과로부터 얻은 가이드라인이 존재한다는 것이다. 베이지언의 방법론을 이용하면 이러한 모수에 대한 선험적(prior) 지식을 선험적 분포(prior distribution) 형태로 고려할 수 있다. 현실 자료에서 얻은 우도함수와 선험적 분포를 베이즈의 법칙(Bayes' Rule)을 통해 결합하면 사후적 분포(posterior distribution)를 유도할 수 있다. 베이지언의 관점에서 보면 서로 다른 모수에 대한 선험적 가정과 주어진 자료에 대한 분석 모형을 비교할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 베이지언 방법론을 적용하기 위해서는 아주 복잡한 수치해석적 방법(numerical method)을 사용해야 한다는 단점이 있다.

본고에서는 기본적인 RBC 모형과 신케인지언 DSGE 모형을 살펴보고, 일계조건으로 표현된 복잡한 비선형차분방정식을 선형근사시킴으로써 해를 구하는 과정을 개관해 본다. 또한 이렇게 구한 해를 기초로 시뮬레이션을 통해 현실 자료와 비교해 보고, 충격반응함수와 예측오차의 분산분해방법을 통해 정책 효과를 분석하는 과정도 살펴본다.

II

DSGE 모형의 근사화와 모형의 해(解)

1. 선형화(Linearization)
2. 모형의 해(解)(Solution Methods)

II. DSGE 모형의 근사화와 모형의 해(解)

DSGE 모형을 근사화하는 방법은 크게 세 가지로 나눌 수 있다. 첫째는 선형근사, 둘째는 로그선형근사, 마지막으로 비선형근사이다.

선형 근사화된 모형의 해는 변수들의 상태공간형태를 취하며, 여러 가지 해를 구하는 방법이 이용가능하나 대표적으로는 Blanchard and Kahn의 방법, Sim의 method, Klein의 method, 미정계수법을 이용한 방법(Undetermined coefficients approach : Ulig,1999)을 들 수 있다.¹⁾

DSGE 모형의 비선형근사법에는 projection methods, value-function iterations, a policy function iterations 등이 대표적이며 서론에서 지적한 것처럼 비선형근사에서는 선형근사처럼 모형안의 변수들 간의 명시적 함수형태를 알 수 없으므로 변수들의 확률적인 성질을 추출하기 위해서는 시뮬레이션 기법에 의존해야 한다.

우선 DSGE 모형의 로그근사화된 해를 구하는 방법을 개괄적으로 살펴보도록 하자. DSGE 모형의 해인 비선형 기대차분방정식체계 또는 일계조건, 오일러 방정식의 로그선형근사화된 형태는 아래와 같이 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$A\xi_{t+1} = B\xi_t + Cv_{t+1} + D\eta_{t+1} \quad (1)$$

또한 방정식 (1)의 해는

$$\xi_{t+1} = F(\mu)\xi_t + G(\mu)v_{t+1} \quad (2)$$

1) 보다 자세한 내용을 위해서는 Dejong and Dave(2007), Canova(2007), 그리고 해당 논문을 참조하기 바란다. 본 보고서는 이해를 돕기 위해 그 표기법에 있어서 Dejong and Dave(2007)를 충실히 따르려 노력하였다.

여기에서 ξ_t 는 모형내 변수들의 정상균형상태에서의 로그편차(logged deviations from steady state)값들의 벡터이다. 예를 들면 산출량을 나타내는 변수 y_t 의 정상상태값을 $\bar{y}$ 라고 하면 앞으로 $\tilde{y}_t$ 를 정상균형상태에서의 로그편차로 나타내기로 하자. 즉,

$$\tilde{y}_t = \log\left(\frac{y_t}{\bar{y}}\right)$$

그리고 이러한 변수들의 벡터를 ξ_t 라고 하면 예를 들면 $\xi_t = [\tilde{y}_t \ \tilde{c}_t \ \tilde{n}_t]'$ 가 될 것이다. v_t 는 모형안에 포함된 확률적 외생변수의 충격들(collection of structural shocks)의 벡터이고, η_t 는 DSGE모형의 해에 포함된 기대변수와 관련된 기대오차(expectational errors)들의 벡터이고, μ 는 모형안에 존재하는 모수들('deep' or structural parameters)의 벡터이다.

방정식 (2)에서 벡터 ξ_t 의 어떤 변수는 관측불가능(unobservable)하고, 어떤 변수(or linear combinations of variables)는 관측가능(observable)하다. 따라서 실증적으로 위와 같은 방정식체계를 평가하기 위해서는 칼만필터(Kalman filter)와 같은 필터링을 통해서 비관측인자를 추출해야만 한다. 칼만필터에서는 관측 가능한 변수(X_t)를 비관측인자와 연결시키는 관계식이 필요하다.

$$X_t = H(\mu)' \xi_t + u_t \quad (3)$$

여기에서

$$E(u_t u_t') = \Sigma_u$$

위에서 u_t 는 관측가능한 변수 X_t 가 관측오차(measurement error)를 가지고 있을 가능성을 반영한 것이다.

우선 아래와 같이 정의하자.

$$e_{t+1} = G(\mu)v_{t+1}$$

$$\text{여기에서} \quad E(e_t e_t') = Q(\mu) \quad (4)$$

위에서 u_t 와 v_t 의 확률적 분포에 대한 가정을 토대로 로그우도함수(log-likelihood function) $\log(X|\Lambda)$ 또는 $\log(X|\mu)$ 를 유도할 수 있을 것이다.

상태공간모형(State-space representation of the model):

==> 측정방정식(Measurement Equation): $X_t = H(\mu)' \xi_t + u_t$

전이방정식(Transition equation): $\xi_{t+1} = F(\mu)\xi_t + e_t$

$$\text{여기에서} \quad E(u_t u_t') = \Sigma_u$$

$$e_{t+1} = G(\mu)v_{t+1}$$

$$E(e_t e_t') = Q(\mu)$$

다음으로 DSGE모형의 비선형근사에 대해서 개괄해 보자. 우선 모든 변수는 로그선형근사와는 달리 수준(level)로 표시된다. 세개의 방정식으로 DSGE모형의 비선형근사를 나타낼 수 있다.

먼저, 첫 번째 방정식은 상태변수(state variable) s_t 의 시간에 따른

변화를 표현하는 것이다.

$$s_t = f(s_{t-1}, v_t) \quad (5)$$

두 번째 식은 정책함수(policy function)으로서 선택변수(control variable) c_t 의 최적 경로를 나타내며, s_t 의 함수로 표현할 수 있을 것이다.

$$c_t = c(s_t) \quad (6)$$

마지막으로 세 번째 식은 모형의 모든 변수들을 관측 가능한 변수 X_t 에 연결시키는 것이다.

$$\begin{aligned} X_t &= \tilde{g}(s_t, c_t, v_t, u_t) \\ &\equiv g(s_t, u_t) \end{aligned} \quad (7)$$

여기에서 v_t 는 모형안에 포함된 확률적 외생변수의 충격들(collection of structural shocks)의 벡터이고, u_t 는 관측가능한 변수 X_t 가 관측오차(measurement error)를 가지고 있을 가능성을 반영한 것이다.

본절에서는 첫째, DSGE모형의 해인 비선형기대차분방정식체계(nonlinear system of expectational difference equations)를 방정식 (1)과 같은 선형체계로 바꾸는 과정과 둘째, 주어진 (1)하에서 (2)와 같은 형태의 해를 구하는 여러 방법들에 대해서 살펴보고자 한다.

1. 선형화(Linearization)

아래와 같은 n 개의 비선형차분방정식체계에 대해 생각해보자.

$$\Psi(x_{t+1}, x_t) = 0 \quad (8)$$

여기에서 0 과 x 는 $n \times 1$ 벡터이고 x 는 수준(level)으로 표현된 변수이다. DSGE 모형은 위와 같은 비선형 차분방정식의 형태로 나타나며, 여기에 확률적인 인자(stochastic components)가 추가된다. 모형의 파라메타는 μ 이다. 위식의 명시적 해를 구하는 것이 불가능하므로 선형화된 체계로 근사시켜 해를 구하게 된다. 또한 모형의 확률인자(stochastic components)는 일반적으로 선형화된 체계에 더하여지므로 선형근사단계에서는 이를 생략한다. 또한 모형의 기대항(expectational terms) ($E_t(x_{t+j})$)도 선형화 단계에서는 다른 항과 같이 취급되므로 따로 떼어내어 표현하지 않는다.

우리가 원하는 선형근사화된 식의 형태는 아래와 같다.

$$A\xi_{t+1} = B\xi_t \quad (9)$$

가. 테일러시리즈 근사(Taylor series approximation)

방정식 (8)를 정상상태 $\bar{x}$ 주위에서 일계 테일러시리즈 근사하면

$$\Psi(\bar{x}) + \frac{\partial \Psi}{\partial x_t}(\bar{x}) \times (x_t - \bar{x}) + \frac{\partial \Psi}{\partial x_{t+1}}(\bar{x}) \times (x_{t+1} - \bar{x}) \approx 0 \quad (10)$$

여기에서 $(x_t - \bar{x})$ 은 $n \times 1$ 이고 $n \times n$ 메트릭스 $\frac{\partial \Psi}{\partial x_t}(\bar{x})$ 은 자코비안(Jacobian) 메트릭스이다. 따라서 방정식 (9)와 같이 나타나면 아래와 같다.

$$A = \frac{\partial \Psi}{\partial x_{t+1}}(\bar{x}), \quad B = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_t}(\bar{x}), \quad \xi_t = (x_t - \bar{x})$$

나. 로그선형 근사(Log-linear Approximation)

우선 다음과 같은 (1×1) 스칼라인 경우를 생각해 보자.

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

위에 자연로그를 취하면

$$\log x_{t+1} = \log[f(e^{\log x_t})]$$

이를 선형근사화하면

$$\log x_{t+1} \approx \log[f(\bar{x})] + \frac{f'(\bar{x})\bar{x}}{f(\bar{x})} (\log x_t - \log \bar{x})$$

위에서 $\frac{f'(\bar{x})\bar{x}}{f(\bar{x})}$ 는 x_{t+1} 은 x_t 에 대한 탄력성임을 알 수 있다. 또

한 $\log[f(\bar{x})] = \log \bar{x}$ 이므로 위식은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\log\left(\frac{x_{t+1}}{\bar{x}}\right) \approx \frac{f'(\bar{x})\bar{x}}{f(\bar{x})} \log\left(\frac{x_t}{\bar{x}}\right)$$

위 식은 z_t 를 정상상태로부터 퍼센티지 편차로 표현한 것이라고 볼 수 있다. 식 (8)은 양변에 로그를 취하는 것이 불가능하므로 이를

$$\Psi_1(x_{t+1}, x_t) = \Psi_2(x_{t+1}, x_t) \quad (11)$$

위식에 로그를 취하여 정리하면

$$\log \Psi_1(e^{\log x_{t+1}}, e^{\log x_t}) - \log \Psi_2(e^{\log x_{t+1}}, e^{\log x_t}) = 0 \quad (12)$$

위식의 일계 테일러시리즈 근사(first-order Taylor series approximation)를 취하면 로그선형근사화된 모형이 된다. 첫번째 항만을 보면,

$$\begin{aligned} \log \Psi_1(x_{t+1}, x_t) \approx & \log[\Psi_1(\bar{x})] + \frac{\partial \log \Psi_1}{\partial \log x_{t+1}}(\bar{x}) \times \log\left(\frac{x_{t+1}}{\bar{x}}\right) \\ & + \frac{\partial \log \Psi_1}{\partial \log z_t}(\bar{x}) \times \log\left(\frac{x_t}{\bar{x}}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

두번째 항도 같은 방법으로 전개하여 아래와 같이 정의하면,

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{\partial \log \Psi_1}{\partial \log x_{t+1}}(\bar{x}) - \frac{\partial \log \Psi_2}{\partial \log x_{t+1}}(\bar{x}) \right] \\ B &= - \left[\frac{\partial \log \Psi_1}{\partial \log x_t}(\bar{x}) - \frac{\partial \log \Psi_2}{\partial \log z_t}(\bar{x}) \right] \\ \xi_t &= \log\left(\frac{x_t}{\bar{x}}\right) \end{aligned}$$

식 (2.2)와 같이 선형근사화된 모형을 얻는다. 앞으로 논의할 실증 분석에서는 주어진 다른 μ 하에서 식 (8)이나 (12)를 반복적으로 선형근사해야 한다. 그런 경우에는 수치해석학적 그래디언트 계산방법을 이용하여 선형화 과정을 자동화하는 것이 편리하다. 그래디언트 계산은 명시적으로 미분하지 않고 식 (10)이나 (13)의 자코비안 행렬을 구하는 과정을 말한다. 이는 주어진 파라메타(μ), 정상상태 값($\bar{x}$)하에서 i) x_t 가 $\bar{x}$ 에서 고정되어 있는 가운데 x_{t+1} 이 변할 때 식 (8)를 통해 $n \times 1$ 벡터를 계산하고, ii) x_{t+1} 이 $\bar{x}$ 에서 고정되어 있는 가운데 x_t 가 변할 때 식 (8)를 통해 $n \times 1$ 벡터를 계산하여 각각 자코비안 행렬을 수치적으로

계산하는 것이다.

$$\text{즉, } \frac{\partial \Psi}{\partial x_{t+1}}(\bar{x}) = A, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_t}(\bar{x}) = -B \text{ 가 된다.}$$

다. 간단한 예제

아래와 같은 예산제약식을 고려해 보자.

$$y_t = c_t + i_t$$

이미 선형이므로 이를 식 (8)의 형태로 바꾸면

$$y_t - c_t - i_t = 0$$

식 (10)의 형태로 표현하면

$$x_t = [y_t \ c_t \ i_t]' , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_t} = [1 \ -1 \ -1]$$

로그선형화하기 위해 (12)식의 형태로 바꾸면

$$\log y_t - \log [e^{\log c_t} + e^{\log i_t}] = 0$$

$$\left[\frac{\partial \log \Psi_1}{\partial \log x_t}(\bar{x}) - \frac{\partial \log \Psi_2}{\partial \log x_t}(\bar{x}) \right] = \left[\frac{1}{\bar{y}} - \frac{\bar{c}}{\bar{c} + \bar{i}} - \frac{\bar{i}}{\bar{c} + \bar{i}} \right] \quad (14)$$

또 다른 예로서 Cobb-Douglas 생산함수를 보면,

$$y_t = a_t k_t^\alpha n_t^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0,1)$$

위식에 로그를 취하여 식 (12)의 형태로 바꾸어주면

$$\log y_t - \log a_t - \alpha \log k_t - (1-\alpha) \log n_t = 0$$

다음과 같이 정의하여

$$x_t = \left[\log\left(\frac{y_t}{y}\right) \log\left(\frac{a_t}{a}\right) \log\left(\frac{k_t}{k}\right) \log\left(\frac{n_t}{n}\right) \right],$$

$$\left[\frac{\partial \log \Psi_1}{\partial \log z_t}(\bar{x}) - \frac{\partial \log \Psi_2}{\partial \log z_t}(\bar{x}) \right] = [1 \quad -1 \quad -\alpha \quad -(1-\alpha)] \quad (15)$$

2. 모형의 해(解)(Solution Methods)

모형을 (1) 식의 $A\xi_{t+1} = B\xi_t + Cv_{t+1} + D\eta_{t+1}$ 이나 (5) 식의 $A\xi_{t+1} = B\xi_t$ 의 형태로 근사시켰다면, 이를 토대로 (2) 식의 $\xi_{t+1} = F(\mu)\xi_t + G(\mu)v_{t+1}$ 같은 형태의 해를 구해야 한다.

램지(Ramsey)의 성장모형을 예로 그 과정을 살펴보자.

램지의 성장모형은 아래와 같은 다섯 개의 방정식체계로 나타낼 수 있다.

$$\widetilde{y}_{t+1} - \widetilde{a}_{t+1} - \alpha \widetilde{k}_{t+1} = 0 \quad (a)$$

$$\widetilde{y}_{t+1} - \gamma_c \widetilde{c}_{t+1} - \gamma_i \widetilde{i}_{t+1} = 0 \quad (b)$$

$$\theta_{1c} E_t(\widetilde{c}_{t+1}) + \theta_a E_t(\widetilde{a}_{t+1}) - \theta_k E_t(\widetilde{k}_{t+1}) - \theta_{1c} \widetilde{c}_t = 0 \quad (c)$$

$$\widetilde{k}_{t+1} - \delta_k \widetilde{k}_t - \delta_i \widetilde{i}_t = 0 \quad (d)$$

$$\widetilde{a}_{t+1} - \rho \widetilde{a}_t = \epsilon_{t+1} \quad (e)$$

위에서 변수 $\{\widetilde{y}_t, \widetilde{c}_t, \widetilde{i}_t, \widetilde{k}_t, \widetilde{a}_t\}$ 는 각각 산출량, 소비, 투자, 실물 자본, 생산성 충격 등을 나타낸다. 앞에서 기술한 바와 같이 모두 정상 균형에서 로그편차형태로 나타낸 것이다. 모형의 구조적 모수들의 벡터는 $\mu = [\alpha \gamma_c \gamma_i \theta_{1c} \theta_a \theta_k \theta_{2c} \delta_k \delta_i \rho]'$ 이다. 위식을 익숙한 선형차분 방정식체계로 아래와 같이 표현할 수 있을 것이다.

$$A\xi_{t+1} = B\xi_t + Cv_{t+1} + D\eta_{t+1} \quad (1)$$

각 메트릭스의 구체적인 형태는 아래와 같이 표현될 수 있을 것이다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha & -1 \\ 1 & -\gamma_c & -\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{1c} & 0 & \theta_k & \theta_a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta_{2c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_i & \delta_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi_t = \begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \tilde{c}_t \\ \tilde{i}_t \\ \tilde{k}_t \\ \tilde{a}_t \end{bmatrix} \quad v_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon_{t+1} \end{bmatrix} \quad \eta_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \eta_{ct+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

위와 같이 선형 근사화된 모형의 해는 식 (2)와 같이 모형내 변수의 상태공간(a state-space representation) 형태를 취하며, 여러 가지 해를 구하는 방법이 이용가능하나 대표적으로는 Blanchard와 Kahn의 방법, Sim의 방법, Klein의 방법, 그리고 미정계수법을 이용한 방법(Undetermined coefficients approach:Ulig,1999)을 들 수 있을 것이다. 우선, 가장 많이 쓰이는 Blanchard와 Kahn의 방법론에 대해서 살펴보자.

가. Blanchard와 Kahn(BK)의 방법

BK 방법론은 우선 위의 선형 근사화된 방정식체계 $A\xi_{t+1} = B\xi_t + Cv_{t+1} + D\eta_{t+1}$ 를 아래와 같은 형태로 다시 표현하는 것으로부터 출발한다.

$$\begin{bmatrix} \xi_{1t+1} \\ E_t(\xi_{2t+1}) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} \xi_{1t} \\ \xi_{2t} \end{bmatrix} + E f_t \quad (17)$$

여기에서 ξ_{1t} ($n_1 \times 1$)은 내생적인 선결 변수이고 $E_t(\xi_{1t+1}) = \xi_{1t+1}$, ξ_{2t} ($n_2 \times 1$)은 내생적인 비선결이고 $\xi_{2t+1} = E_t(\xi_{2t+1}) + \eta_{t+1}$, f_t ($k \times 1$)은 외생변수이다.

첫 번째 단계로 식 (16)을 식 (17)의 형태로 변환시키기 위해서는 체계를 차원을 줄여 주는 준비가 필요하다. 즉, 예제의 램지,모형을 식 (17)과 같은 형태인 아래와 같이 표현하기 위한 준비단계가 필요하다.

$$\begin{bmatrix} \widetilde{k_{t+1}} \\ E_t(c_{2t+1}) \end{bmatrix} = \widetilde{A} \begin{bmatrix} \widetilde{k_{1t}} \\ \widetilde{c_{2t}} \end{bmatrix} + E \widetilde{a_t} \quad (18)$$

그 과정을 살펴보면, 우선 다음과 같이 가정하자.

$$x_t = [\widetilde{y_t} \ \widetilde{i_t}]', \quad \zeta_t = [\widetilde{k_t} \ \widetilde{c_t}]$$

또한 $E_t(\widetilde{a_{t+1}}) = \rho \widetilde{a_t}$ 라는 사실을 이용하면, 식 (16)으로 표현된 Ramsey 모형은 아래와 같은 형태로 다시 표현할 수 있을 것이다.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \gamma_i \end{bmatrix}}_{\widetilde{\Psi}_0} x_t = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\widetilde{\Psi}_1} \zeta_t + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\widetilde{\Psi}_2} \widetilde{a_t} \quad (19)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \theta_k \theta_{1c} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\widetilde{\Psi}_3} E_t(\zeta_{t+1}) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\theta_{2c} \\ \delta_k & 0 \end{bmatrix}}_{\widetilde{\Psi}_4} \zeta_t + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_i \end{bmatrix}}_{\widetilde{\Psi}_5} x_t + \underbrace{\begin{bmatrix} -\theta_{a\rho} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\widetilde{\Psi}_6} \widetilde{a_t} \quad (20)$$

식(19)을 식(20)에 대입하면 아래와 같고,

$$\Psi_3 E_t(\zeta_{t+1}) = [\Psi_4 + \Psi_5 \Psi_0^{-1} \Psi_1] \zeta_t + [\Psi_6 + \Psi_5 \Psi_0^{-1} \Psi_2] \widetilde{a_t} \quad (21)$$

(21)식의 양변에 Ψ_3^{-1} 을 곱하면 BK 방법을 이용하여 해를 구하기 위한 형태인 (18)식이 얻어진다.

STEP 1: BK 방법은 우선 식 (18)의 $\tilde{A}$ 에 조단분해(Jordan decomposition)을 적용하는 것으로부터 출발한다.

$$\tilde{A} = \Lambda^{-1} J \Lambda \quad (22)$$

위에서 J의 대각원소는 $\tilde{A}$ 의 특성근으로 이루어져 있으며 그 절대값의 크기에 따라 좌측 원소에서 증가하는 순서로 배열되어 있다.

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

J_1 은 특성근의 값들이 1보다 작거나 같으며 안정적이고 수렴하며, J_2 는 특성근의 값들이 1보다 큰 대각원소들로 이루어져 불안정적이고 발산한다고 말한다. 또한 특성벡터로 이루어진 Λ 와 E 는 아래와 같이 분할될 수 있다.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

위에서 보듯이 BK 방법을 적용하기 위해서는 두 가지 필요조건이 만족되어야 한다. 첫째, 모형에 따라 식 (17)과 같은 형태로 표현할 수 있는 체계축소가 필요하다. 둘째, Ψ_0 과 Ψ_3 의 역행렬이 존재해야 한다.

또한 모형의 해와 관련하여 다음과 같은 BK 조건이 있다.

(i) 만약, 발산하는 특성근의 수가 비선결변수의 수와 같으면 식 (17)의 안장경로 해는 안정적이며 유일하다.

(ii) 만약, 발산하는 특성근의 수가 비선결변수의 수를 초과하면 모형의 해가 존재하지 않는다.

(iii) 만약, 발산하는 특성근의 수가 비선결변수의 수보다 작으면 무한의 해가 존재한다.

STEP 2: 모형의 유일한 해가 존재하는 조건을 만족한다고 가정하고 식(22)를 대입하면

$$\begin{bmatrix} \xi_{1t+1} \\ E_t(\xi_{2t+1}) \end{bmatrix} = \Lambda^{-1} J \Lambda \begin{bmatrix} \xi_{1t} \\ \xi_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} f_t \quad (23)$$

양변의 앞에 Λ 를 곱해주면

$$\begin{bmatrix} \xi'_{1t+1} \\ E_t(\xi'_{2t+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi'_{1t} \\ \xi'_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} f_t \quad (24)$$

$$\text{여기에서} \quad \begin{bmatrix} \xi'_{1t+1} \\ \xi'_{2t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{1t} \\ \xi_{2t} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

위와 같은 변환은 모형의 체계를 두개로 분리시켜 모형의 비선결변수들은 불안정한 특성근에만 의존하게 만든다.

STEP 3: 분리된 방정식체계에서 먼저 비선결변수에 대한 해를 forward iteration을 통해서 구한다. 먼저 식 (24)의 비선결변수 부분만을 떼어내 다시 표현하면 아래와 같이 쓸 수 있을 것이다.

$$\xi'_{2t} = J_2^{-1} E_t(\xi'_{2t+1}) - J_2^{-1} D_2 f_{2t} \quad (27)$$

식 (27)을 이용해 ξ'_{2t+1} 을 표현하면

$$\xi'_{2t+1} = J_2^{-1} E_{t+1}(\xi'_{2t+2}) - J_2^{-1} D_2 f_{2t+1} \quad (28)$$

식 (28)을 다시 식 (27)에 대입하면 다음식을 얻는다.

$$\xi'_{2t} = J_2^{-2} E_t(\xi'_{2t+2}) - J_2^{-2} D_2 E_t(f_{2t+1}) - J_2^{-1} D_2 f_{2t} \quad (29)$$

식 (29)식을 얻기 위해 Law of Iterated Expectation $E_t[E_{t+1}(\xi_t)] = E_t(\xi_t)$ 을 이용하였다. n 이 무한대로 감에 따라 J_2^{-n} 은 사라지고 위의 과정을 되풀이하면 결국 아래와 같은 표현만 남게 된다.

$$\xi'_{2t} = - \sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-(i+1)} D_2 E_t(f_{2t+i}) \quad (30)$$

식 (25)을 이용하여 이를 다시 원래의 ξ_{2t} 로 표현하면

$$\xi_{2t} = -\Lambda_{22}^{-1} \Lambda_{21} \xi_{1t} - \Lambda_{22}^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-(i+1)} D_2 E_t(f_{2t+i}) \quad (31)$$

램지 모형의 예에서 보면

$$E_t(f_{2t+i}) = \rho^i \tilde{a}_t \quad (32)$$

따라서 식 (31)은 다음과 같은 형태가 된다.

$$\xi_{2t} = -\Lambda_{22}^{-1} \Lambda_{21} \xi_{1t} - \Lambda_{22}^{-1} J_2^{-1} (I - \rho J_2^{-1} D_2)^{-1} \tilde{a}_t \quad (33)$$

STEP4: 마지막으로 방정식의 비발산적 부분을 풀기 위해 (23)식의
윗 부분을 펼쳐보면,

$$\xi_{1t+1} = \widetilde{A}_{11} \xi_{1t} + \widetilde{A}_{22} \xi_{2t} + E_1 f_t \quad (34)$$

여기서 $\widetilde{A}_{11}$ 과 $\widetilde{A}_{22}$ 는 ξ_{1t} 와 ξ_{2t} 에 상응하는 $\widetilde{A} = \Lambda^{-1} J \Lambda$ 의 분할이
다. 따라서 식(31)로부터 ξ_{2t} 을 얻어 이를 (34)식에 대입하면 ξ_{1t} 의 해를
얻는다.

나. Sim의 방법

Sims(2001)은 아래와 같이 표현된 모형의 해를 구하는 새로운 방법
을 제안한다.

$$A\xi_{t+1} = B\xi_t + E + Cv_{t+1} + D\eta_{t+1} \quad (35)$$

기본적으로 Sims의 방법은 BK 방법과 마찬가지로 방정식 체계를 발산하는 불안정한 부분과 안정이고 비발산하는 부분으로 분리하는 것이다. 그러나 BK 방법과는 달리 (i) 기대연산자를 없애고 기대오차 η_{t+1} 를 포함하고 있으며, (ii) 모형의 외생변수 f_t 가 ξ_{t+1} 에 포함되어 구조적 충격 v_{t+1} 를 만든다. (iii) 또한 Sims 방법은 BK방법과는 달리 예비적인 체계축소 과정을 필요로 하지 않으며, (iv) 선결변수와 비선결변수와의 구분도 필요하지 않다. 해를 구하는 과정을 개괄적으로 살펴 보자.

Step 1: 첫 단계로 A와 B를 상위대각단위행렬로 분해하기 위해 “QZ” 인수분해를 사용한다.

$$A = Q' \Lambda Z' \quad (36)$$

$$B = Q' \Omega Z'$$

$$\text{여기에서 } Q'Q = QQ' = I, \quad Z'Z = ZZ' = I$$

따라서 원래의 방정식 체계 식(35)는 아래와 같이 나타낼 수 있을 것이다.

$$Q' \Lambda Z' \xi_{t+1} = Q' \Omega Z' \xi_t + E + Cv_{t+1} + D\eta_{t+1} \quad (37)$$

식(37)의 양변의 앞에 Q를 곱하면

$$\begin{aligned}
\Lambda Z' \xi_{t+1} &= \Omega Z' \xi_t + QE + QCv_{t+1} + QD\eta_{t+1} \\
\Lambda z_{t+1} &= \Omega z_t + QE + QCv_{t+1} + QD\eta_{t+1} \quad (38) \\
\text{여기에서 } Z' \xi_{t+1} &= z_{t+1}.
\end{aligned}$$

Step 2: BK 방법처럼 식 (38)을 특성근이 발산하는 블록과 비발산하는 블록으로 분할한다.

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ 0 & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ 0 & \Omega_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1t-1} \\ z_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} [E + Cv_t + D\eta_t] \quad (39)$$

Step 3: BK 방법과 마찬가지로 발산하는 블록인 (39)식의 하위 부분에 대해서 먼저 풀어 해를 구한다. 이를 위해서 먼저 아래와 같이 정의하자.

$$w_t = Q[E + Cv_t + D\eta_t]$$

그에 따라 아래와 같이 (39)식의 아랫부분을 표현할 수 있다.

$$\Lambda_{22} z_{2t} = \Omega_{22} z_{2t-1} + w_{2t} \quad (40)$$

위 식을 $t+1$ 으로 한 기 더 전개하여 z_{2t} 에 대해서 풀면

$$z_{2t} = Mz_{2t+1} - \Omega_{22}^{-1} w_{2t+1} \quad (41)$$

여기에서 $M = \Omega_{22}^{-1} A_{22}$.

식 (41)에 대해 순차적으로 $z_{2t+1}, z_{2t+2}, \dots$ 를 대입하면

$$z_{2t} = - \sum_{i=0}^{\infty} M^i \Omega_{22}^{-1} w_{2t+1+i} \quad (42)$$

왜냐하면 $\lim_{t \rightarrow \infty} M^t z_{2t} = 0$ 이기 때문이다. 식 (42)은 z_{2t} 를 미래의 구조적 충격과 기대오차의 함수로 나타내고 있음을 알 수 있다. 그러나 시점 t 에서 조건부기대치에 대해서 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$E_t(\eta_{t+s}) = E_t(v_{t+s}) = 0, \quad s > 0$$

위를 이용하면 식 (42)는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$z_{2t} = - \sum_{i=0}^{\infty} M^i \Omega_{22}^{-1} Q_2 E_2 \quad (43)$$

위에서 $Q_2 E_2$ 는 z_{2t} 에 합치하는 QE 의 아랫부분이다.

식(43)의 각 변의 뒤에 $(\Omega_{22}^{-1} Q_2 E_2)^{-1}$ 를 곱하고 아래의 간단한 사실을 이용하면

$$- \sum_{i=0}^{\infty} M^i = -(I - M)^{-1},$$

우리가 원하는 발산하는 부분인 z_{2t} 에 대한 해를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$z_{2t} = (\Lambda_{22} - \Omega_{22})^{-1} Q_2 E \quad (44)$$

Step 4: 마지막으로 z_{2t} 의 해를 토대로 z_{1t} 의 해를 구해야 한다. Sims가 지적한 것처럼 모형의 유일한 해가 존재하기 위해서는 아래의 식 (45) 관계를 만족하는 행렬 Φ 가 존재해야 한다. 이는 z_{1t} 과 z_{2t} 에 관계된 기대오차가 모형안에서 어떻게 관련되어 있는가를 표현하는 것이다.

$$Q_1 D = \Phi Q_2 D \quad (45)$$

식 (45)가 만족되어 유일한 해가 존재한다고 가정하고 방정식체계 (38)의 양변의 앞에 $[I - \Phi]$ 를 곱하면

$$\begin{aligned} & [\Lambda_{11} \quad \Lambda_{12} \quad -\Phi\Lambda_{22}] \begin{bmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \end{bmatrix} \\ &= [\Omega_{11} \quad \Omega_{12} - \Phi\Omega_{22}] \begin{bmatrix} z_{1t-1} \\ z_{2t-1} \end{bmatrix} + [Q_1 - \Phi Q_2][E + Cv_t + D\eta_t] \end{aligned} \quad (46)$$

식 (45)에 의해서 (46)식의 기대오차는 영(0)이 되며, 원래의 변수의 형태로 아래와 같이 표현할 수 있을 것이다.

$$\xi_t = \Theta_E + \Theta_0 \xi_{t-1} + \Theta_1 v_t \quad (47)$$

여기에서

$$H = Z \begin{bmatrix} \Lambda_{11}^{-1} - \Lambda_{11}^{-1}(\Lambda_{12} - \Phi\Lambda_{22}) \\ 0 \quad I \end{bmatrix}$$

$$\Theta_E = H \begin{bmatrix} Q_1 - \Phi Q_2 \\ (\Omega_{22} - \Lambda_{22})^{-1} Q_2 \end{bmatrix} E$$

$$\Theta_0 = Z \Lambda_{11}^{-1} [\Omega_{11} (\Omega_{12} - \Phi\Omega_{22})] Z'$$

$$\Theta_l = H \begin{bmatrix} Q_1 - \Phi Q_2 \\ 0 \end{bmatrix} D$$

다. Klein의 방법

Klein(2000)은 BK(1980)와 Sims(2001) 방법의 혼합이라고 할 수 있는 방법을 제안하는 데 이는 아래와 같이 표현된 DSGE모형의 선형 근사방정식체계에 적용할 수 있을 것이다.

$$\tilde{A} E_t(\xi_{t+1}) = \tilde{B} \xi_t + E f_t \quad (48)$$

Klein의 방법이 BK 방법에 비해 상대적인 이점은 식 (20)의 행렬 Ψ_3 이 특이행렬(singular)이어도 해를 구할 수 있다는 것이다. 이는 $\tilde{A}$ 와 $\tilde{B}$ 에 대해 소위 complex generalized Schur decomposition를 적용하기 때문에 가능하다. 행렬 $\tilde{A}$ 와 $\tilde{B}$ 에 대한 일반화된 Schur 분해는 아래와 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned} Q \tilde{A} Z &= S \\ Q \tilde{B} Z &= T \end{aligned} \quad (49)$$

여기에서 $Q'Q = QQ' = I$, $Z'Z = ZZ' = I$ 이고 행렬 S 와 T 는 상위삼각행렬(upper triangular matrix)이다. 주어진 $\tilde{A}$ 와 $\tilde{B}$ 에 대한 Schur분해를 바탕으로 이후의 과정은 BK 방법론과 동일하다. (보다 자세한 내용을 위해서는 Dejong and Dave(2007)을 참조하기 바란다.)

라. Uhlig의 미정계수접근법

Uhlig(1999)는 미정계수법(method of undetermined coefficients)에 기초한 해법을 제시하였는데, 아래와 같이 표현된 방정식체계에 적용할 수 있다.

$$E_t [F\xi_{t+1} + G\xi_t + H\xi_{t-1} + Lf_{t+1} + Mf_t] = 0 \quad (50)$$

$$f_{t+1} = Nf_t + v_{t+1}, \quad E_t(v_{t+1}) = 0$$

Ramsey의 성장모형의 예에서 보면

$$\xi_t = [\tilde{y}_t \quad \tilde{c}_t \quad \tilde{i}_t \quad \tilde{k}_t]'$$

식(50)에서 보는 것처럼 방정식 체계안에 2계 시차가 존재하므로, 이에 따라 전개하여 식 (50)의 형태로 표현하면 관련된 행렬은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{1c} & 0 & \theta_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & -\gamma_c & -\gamma_i & 0 \\ 0 & \theta_{2c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_i & -\delta_k \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$H = 0, \quad L = [0 \ 0 \ \theta_a \ 0]', \quad M = [-1 \ 0 \ 0 \ 0]', \quad N = \rho$$

우선 방정식 체계 (50)에 대한 해는 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\xi_t = P\xi_{t-1} + Qf_t \quad (52)$$

위와 같은 해를 유도하기 위해서는 우선 아래와 같은 2차 행렬방정식(matrix quadratic equations)을 풀어야 한다.

$$\Psi P^2 - \Gamma P - \Theta = 0 \quad (53)$$

여기에서 P 는 $(m \times m)$ 행렬이다.

2차 행렬방정식의 해를 구하기 위해서는 우선 다음과 같이 정의하자.

$$\Xi_{2m \times 2m} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Theta \\ I_m & 0_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad \Delta_{2m \times 2m} = \begin{bmatrix} \Psi & 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} & I_m \end{bmatrix} \quad (54)$$

식 (54)와 같이 주어진 행렬하에서 s 와 λ 를 Δ 에 대한 Ξ 의 일반화된 특성근²⁾과 특성벡터라고 하자. $\xi \in R^m$ 에 대해 $s' = [\lambda \xi', \xi']$ 이므로 2차 행렬방정식의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$P = \Omega \Lambda \Omega^{-1} \quad (55)$$

$$\Omega = [\xi_1, \dots, \xi_m]$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

위를 바탕으로 Uhlig의 방법에 대해서 살펴보자.

Step 1 우선 식(52)를 이용하여 ξ_t 와 ξ_{t+1} 를 ξ_{t-1} 와의 관계로 표현하면

$$\begin{aligned} \xi_t &= P\xi_{t-1} + Qf_t \\ \xi_{t+1} &= P^2\xi_{t-1} + PQf_t + Qf_{t+1} \end{aligned} \quad (56)$$

식 (56)을 원래 방정식체계 (50)에 대입하고 기대치를 취하면 아래의 식을 얻는다.

$$[FP^2 + GP + H]\xi_{t-1} + [(FP + G)Q + M + (FQ + L)N]f_t = 0 \quad (57)$$

식(57)이 성립하기 위해서는 ξ_{t-1} 와 f_t 의 계수들이 영(0)이 되어야 한다.

Step 2 식 (57)의 계수에 대한 제약을 이용하여 P와 Q에 대해서 풀어야 한다.

첫번째 ξ_{t-1} 의 계수에 대한 제약은 아래를 만족하는 P를 구할 수

-
- 2) 어떤 행렬 A에 대한 일반화된(generalized) 특성근은 $Ax = \lambda \Sigma x$ 을 만족하는 λ 이며, 여기서 Σ 는 대칭행렬이다.

있다.

$$FP^2 + GP + H = 0 \quad (58)$$

두 번째 f_t 의 계수에 대한 제약은 아래를 만족하는 Q를 구할 수 있다.

$$(FP + G)Q + M + (FQ + L)N = 0 \quad (59)$$

행렬 Q에 대한 해는 아래와 같이 표현된다.

$$Q = V^{-1}[-vec(LN + M)],$$

$$\text{여기에서 } V = N' \otimes F + I_k \otimes (FP + G)$$

행렬 P와 Q에 대한 해는 P가 안정적인 특성근을 갖는 한 유일하다. Christiano(2002)가 지적한 것처럼 Uhlig의 방법은 모형안의 내생변수에 관련된 정보집합이 서로 다를 때 특히 유용한 것으로 알려져 있다.

III

실물경기변동모형 (Real Business Cycle Model)

1. RBC모형의 구조
2. 해(解)의 선형근사

III. 실물경기변동모형 (Real Business Cycle Model)

DSGE 모형의 해에 대한 선형근사화된 방정식체계는 앞서 설명한 것처럼 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$A\xi_{t+1} = B\xi_t + Cv_{t+1} + D\eta_{t+1}$$

여기에서는 두 가지 모형 (RBC 모형, 신케인지안 DSGE모형)을 예로 DSGE모형에 대한 선형근사화가 어떻게 이루어지는지 살펴볼 것이다. 우선 DSGE모형의 근간이 되는 RBC 모형에서 출발해 보도록 하자.

RBC 모형의 기초는 Ramsey(1928)와 Solow(1956)의 신고전학과 성장이론으로써 현대 거시경제학의 기본적인 토대를 제공하고 있으며, Solow의 성장모형은 세 가지 주요 요소로 구성되어있다. (i)노동과 자본 사이의 대체가 가능한 생산함수, (ii) 산출량의 일부분이 매기마다 투자되어 자본으로 축적되는 과정, (iii) 외생적으로 주어진 증가율에 따라 성장하는 노동공급(labor supply process) 등이다. Solow은 그러한 경제가 산출량과 자본스톡, 그리고 노동이 같은 속도로 성장하는 정상균형성장경로(Steady-state growth path)로 수렴함을 보였다.

Solow 모형에서 외생적으로 주어진 고정된 저축률이 미래를 내다보는 가계의 일생기간의 최적화행동으로 노동과 저축을 결정하는 모형으로 바뀌는 순간 모형은 경기변동의 Dynamic Stochastic Model을 위한 기본 토대가 된다. 예를 들면, 양(+)의 생산성 충격이나 다른 실물적 충격이 발생하면 산출량과 가계의 저축이 함께 증가할 것이다. 이에 따라 투자가 증가하고 자본축적과정에서 원래 충격의 영향이 지속적으로 경

제전체에 파급되게 되는 것이다. 일시적인 실물적 충격이 자본축적의 경로를 통해 오랫동안 영향을 미쳐 현실의 경기변동에서 관찰되는 지속성이 나타나게 되는 것이다.

따라서 RBC 모형은 신고전학파의 성장모형에 노동과 여가의 상충관계와 기술적진보에 대한 불확실성을 더한 것이라고 할 수 있을 것이다. Kydland and Prescott(1982)의 RBC 모형이 본래 의도한 것은 시장의 불완전성이 없고 가격이 완전히 신축적이라고 가정하고, 장기적인 경제성장의 중요한 현상을 설명하는 신고전학파의 성장이론의 틀 안에서 단기적인 경기변동이 얼마나 설명될 수 있는지 살펴보는 것이었다.

1. RBC 모형의 구조

대표적인 가계는 소비와 여가로부터 얻어지는 할인된 기대효용의 흐름을 극대화 한다고 가정한다.

$$\max_{c_s, l_s} U_t = E_t \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} u(c_s, l_s) \quad (1)$$

여기에서 E_t 는 시간 t에서 이용가능한 정보에 대한 조건부 기대연산자이고, $\beta \in (0,1)$ 는 가계의 주관적인 할인인자, $u(\cdot)$ 은 순간적인 효용함수, c_t 와 l_t 은 시간 t에 가계가 선택한 소비와 여가 수준이다.

가계는 소비함과 동시에 단 한가지의 상품(y_t)을 아래와 같은 기술적 제약하에서 생산하한다고 가정한다.

$$y_t = z_t f(k_t, n_t) \quad (2)$$

여기에서 k_t 와 n_t 는 가계가 y_t 를 생산하는 데 투입한 물적자본과 노동의 양이며, z_t 는 확률적인 생산성 충격을 의미한다.

일정한 한기 동안 가계에 주어진 시간을 1이라고 하면 이는 노동과 여가로 분배된다.

$$1 = n_t + l_t \quad (3)$$

가계가 생산한 산출물 y_t 는 소비되거나 다음기의 생산을 위해서 투자된다.

$$y_t = c_t + i_t \quad (4)$$

자본스톡 k_t 는 다음과 같이 시간에 따라 변화한다고 가정하자.

$$k_{t+1} = i_t + (1-\delta)k_t \quad (5)$$

가계가 직면한 최적화 문제는 식(2)-(5)의 제약하에서 목적함수인 (1)을 극대화하는 문제라고 할 수 있을 것이다. 초기조건 k_0 와 z_0 도 주어져 있다고 가정하자.

위와 같은 가계의 최적화 문제에는 주요한 두가지의 상충관계가 존재한다. 첫째는 소비와 저축의 상충관계이다. 현재소비의 증가는 저축(투자)의 감소로 나타나고 미래의 생산을 위해 이용가능한 자본의 감소를 의미한다. 다른 하나는 노동과 여가의 상충관계이다. 현재 여가의

증가는 노동 투입을 감소시켜 현재 산출량의 감소로 나타난다.

RBC 모형의 명시적인 목표는 신고전학파의 성장모형에 따른 장기적인 소비, 투자, 소득의 균형적인 성장제약이 만족되도록 효용함수 $u(\cdot)$ 와 생산함수 $f(\cdot)$ 에 제약을 가하고 단기적인 경기변동의 중요한 현상들을 설명하는 것이라고 할 수 있다.

위와 같은 제약과 함께 일반적으로 효용함수 $u(\cdot)$ 는 c_t 와 l_t 에 대한 강한 증가함수이고, 두 번 연속 미분가능하며, 강오목한 함수 형태를 갖고 다음과 같은 제약을 만족한다.

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\partial u(c_t, l_t)}{\partial c_t} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\partial u(c_t, l_t)}{\partial l_t} = \infty \quad (6)$$

위와 같은 가계의 최적화 문제에 대한 해는 제약조건을 직접적으로 효용함수에 대입하거나, 라그랑지안을 사용하거나, 동태적 프로그래밍을 이용하여 유도할 수 있을 것이다.

최적화 문제의 기간별 오일러 방정식(혹은 1계조건)은 아래와 같은 두개의 식으로 주어진다.

$$\frac{\partial u(c_t, l_t)}{\partial l_t} = \frac{\partial u(c_t, l_t)}{\partial c_t} \cdot \frac{\partial f(k_t, n_t)}{\partial n_t} \quad (7)$$

$$\frac{\partial u(c_t, l_t)}{\partial c_t} = \beta E_t \left\{ \frac{\partial u(c_{t+1}, l_{t+1})}{\partial c_{t+1}} \left[\frac{\partial f(k_{t+1}, n_{t+1})}{\partial k_{t+1}} + (1 - \delta) \right] \right\} \quad (8)$$

구체적으로 RBC 모형의 정량적인 함의들을 알아보기 위해서는 $u(\cdot)$ 와 $f(\cdot)$ 에 대한 구체적인 함수형태를 가정해야 한다.

우선 효용함수는 아래와 같은 CRRA(Constant Relative Risk Aversion) 형태를 갖는다고 가정해 보자.

$$u(c_t, l_t) = \left(\frac{c_t^\varphi l_t^{1-\varphi}}{1-\phi} \right)^{1-\phi}$$

여기에서 ϕ 는 상대적인 위험기피도를 나타내는 계수이고, 기간별 대체탄력성은 $1/\phi$ 으로 나타난다. 모수 φ 는 소비와 여가의 상대적인 중요성을 나타낸다고 할 수 있다.

생산함수는 콥더글리스 함수 형태를 갖는다고 보자.

$$y_t = z_t k_t^\alpha n_t^{1-\alpha} \quad (9)$$

또한 기술적 충격 z_t 의 로그는 다음과 같이 AR(1) 과정을 따른다.

$$\log z_t = (1-\rho)\log(\bar{z}) + \rho\log z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (10)$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2), \quad |\rho| < 1$$

위와 같이 효용함수, 생산함수, 기술적 충격의 확률적 과정에 대한 가정을 기초로 구체적인 기간별 1계 조건의 형태를 유도하면 아래와 같다.

$$\left(\frac{1-\varphi}{\varphi}\right)\frac{c_t}{l_t} = (1-\alpha)z_t\left(\frac{k_t}{n_t}\right)^\alpha \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & c_t^{\varphi(1-\phi)-1} l_t^{(1-\varphi)(1-\phi)} \\ &= \beta E_t \left\{ c_{t+1}^{\varphi(1-\phi)-1} l_{t+1}^{(1-\varphi)(1-\phi)} \left[\alpha z_{t+1} \left(\frac{n_{t+1}}{k_{t+1}} \right)^{1-\alpha} + (1-\delta) \right] \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

모형의 모든 요소를 모으면 아래와 같이 기본적인 DSGE 모형인 RBC 모형의 해는 비선형 확률적 차분방정식체계로 이루어져 있다.

$$\left(\frac{1-\varphi}{\varphi}\right)\frac{c_t}{l_t} = (1-\alpha)z_t\left(\frac{k_t}{n_t}\right)^\alpha \quad (13)$$

$$c_t^\kappa l_t^\lambda = \beta E_t \left\{ c_{t+1}^\kappa l_{t+1}^\lambda \left[\alpha z_{t+1} \left(\frac{n_{t+1}}{k_{t+1}} \right)^{1-\alpha} + (1-\delta) \right] \right\} \quad (14)$$

$$y_t = z_t k_t^\alpha n_t^{1-\alpha} \quad (15)$$

$$y_t = c_t + i_t \quad (16)$$

$$k_{t+1} = i_t + (1-\delta)k_t \quad (17)$$

$$1 = n_t + l_t \quad (18)$$

$$\log z_t = (1-\rho)\log(\bar{z}) + \rho\log z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (19)$$

여기에서 $\kappa = \varphi(1-\phi)-1$, $\lambda = (1-\varphi)(1-\phi)$.

이와 같은 RBC 모형에서는 경제의 유일한 불확실성의 원인이 생산성충격에 있음을 알 수 있다. 또한 이러한 비교적 간단한 체계하에서는 변수 $\{y_t, c_t, i_t, n_t, l_t, k_t, z_t\}$ 의 정상상태(steady state)를 z_t 를 정상상태인 $\bar{z}=1$ 에 두고 실제로 다음과 같이 계산할 수 있을 것이다.

$$\begin{aligned}\frac{\bar{k}}{\bar{n}} &= \theta \\ \frac{\bar{y}}{\bar{n}} &= \eta \\ \frac{\bar{i}}{\bar{n}} &= \delta\theta \\ \bar{n} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\left(\frac{1-\varphi}{\varphi}\right)[1-\delta\theta^{1-\alpha}]} \\ \bar{l} &= 1 - \bar{n}\end{aligned}\tag{20}$$

$$\text{여기에서 } \theta = \left(\frac{\alpha}{1/\beta - 1 + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \eta = \theta^\alpha$$

정상상태에서 변수 $\{y_t, c_t, i_t, k_t\}$ 는 시간에 따라 변하지 않으며 암묵적으로 이러한 변수들은 모두 추세로부터의 편차로 표현되어 있다. 이에 따라 식(19)처럼 기술충격 z_t 도 추세로부터 편차로 표현되어 있다. 따라서 만약 z_t 를 장기추세를 감안하여 다음과 같이 표현한다면

$$z_t = z_0(1+g)e^{w_t}$$

$$w_t = \rho w_{t-1} + \epsilon_t$$

충격이 존재하지 않을 경우 z_t 의 성장률은 g 이고 $\log z_t$ 에서 추세를 제거하면 식(19)와 같이 표현할 수 있을 것이다. 또한 위와 같은 가정 하에서 z_t 와 $\{y_t, c_t, i_t, k_t\}$ 는 동일한 균형성장률 $\frac{g}{1-\alpha}$ 를 갖게 될 것이다. 따라서 예제와 같은 효용함수와 생산함수는 신고전적 성장이론의 균형성장경로의 제약을 만족함을 알 수 있다.

2. 해(解)의 선형근사화

다음 단계는 위와 같은 식 (13)부터 (19)까지 7개의 비선형차분방정식체계로 이루어진 DSGE 모형의 해를 아래와 같은 선형체계로 바꾸어 주는 것이다.

$$A\xi_{t+1} = B\xi_t + Cv_{t+1} + D\eta_{t+1}$$

여기에서 ξ_t 와 모형의 파라미터인 μ 는 다음과 같다.

$$\xi_t = \left[\log \frac{y_t}{y}, \log \frac{c_t}{c}, \log \frac{i_t}{i}, \log \frac{n_t}{n}, \log \frac{l_t}{l}, \log \frac{k_t}{k}, \log \frac{z_t}{z} \right]$$

$$\mu = [\alpha \ \beta \ \phi \ \varphi \ \delta \ \rho \ \sigma]'$$

이 모형의 두 번째 식인 식 (14)로부터 기대연산자 $E_t(\cdot)$ 를 없애면 기대오차항이 생기게 되고, 따라서 행렬 D 의 형태가

$$D = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]'$$

일곱 번째 식 (19)에 존재하는 생산성충격은 행렬 C 의 구체적인 형태가 아래와 같음을 의미한다.

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]'$$

또한 행렬 A 와 B 의 구체적인 형태를 알기 위해서는 앞서 로그 선형 근사화에서 설명했던 것처럼 수치해석학적 그래디언트(gradient, 기울기) 계산과정 이용하여 선형화 과정을 자동화하는 것이 편리하다. 그래디언트 계산은 명시적으로 미분하지 않고 자코비안 행렬을 구하는 과정을 말한다. 즉, 주어진 파라메타(μ), 정상상태의 값($\bar{x}$) 하에서 i) x_t 가 $\bar{x}$ 에서 고정되어 있는 가운데 x_{t+1} 이 변할 때 식 (8)를 통해 $n \times 1$ 벡터를 계산하고, ii) x_{t+1} 이 $\bar{x}$ 에서 고정되어 있는 가운데 x_t 가 변할 때 식 (8)를 통해 $n \times 1$ 벡터를 계산하여 각각 자코비안 행렬을 수치적으로 계산하는 것이다. 즉, $\frac{\partial \Psi}{\partial x_{t+1}}(\bar{x}) = A$, $\frac{\partial \Psi}{\partial x_t}(\bar{x}) = -B$ 가 된다.

위와 같은 그래디언트 계산과정을 이용하면 아래와 같이 일곱 개 식을 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} 0 = & \log\left(\frac{1-\varphi}{\varphi}\right) + \log c_{t+1} - \log l_{t+1} - \log(1-\alpha) - \log z_{t+1} \\ & - \alpha \log k_t + \alpha \log n_{t+1} \end{aligned} \quad (21)$$

$$0 = \kappa \log c_t + \lambda \log l_t - \log \beta - \kappa \log c_{t+1} - \lambda \log l_{t+1} \quad (22)$$

$$- \log \left[\alpha \exp(\log z_{t+1}) \frac{\exp[(1-\alpha) \log n_{t+1}]}{\exp[(1-\alpha) \log k_{t+1}]} + (1-\delta) \right]$$

$$0 = \log y_{t+1} - \log z_{t+1} - \alpha \log k_t - (1-\alpha) \log n_{t+1} \quad (23)$$

$$0 = \log y_{t+1} - \log \{ \exp[\log(c_{t+1})] + \exp[\log(i_{t+1})] \} \quad (24)$$

$$0 = \log k_{t+1} - \log \{ \exp[\log(i_{t+1})] + (1-\delta) \exp[\log(k_t)] \} \quad (25)$$

$$0 = - \log \{ \exp[\log(n_{t+1})] + \exp[\log(l_{t+1})] \} \quad (26)$$

$$0 = \log z_{t+1} - \rho \log z_t \quad (27)$$

이를 단계별로 요약하면 첫째, 각 식의 양변에 로그를 취하고, 둘째, 첫 번째 단계에서 로그로 전환되지 않은 변수들에 대해서는 $y = \exp(\log(y))$ 를 이용하여 바꾸어 주고, 세 번째 단계는 각 방정식의 모든 항을 오른쪽으로 모으는 것이다. 네 번째로 모든 방정식에 -1 를 곱하여 준다. 위와 같은 준비단계를 거친 다음 $\log y_{t+1}$ 에 대해 도함수를 취하고 정상상태에서 값을 계산하면 행렬 A 가 구해지고, $\log y_t$ 에 대해 도함수를 취하고 정상상태에서 계산하면 행렬 $-B$ 가 구해진다.

행렬 A, B, C, D 의 구체적인 형태가 결정되었다면, 이 DSGE 모형의 선형근사화된 방정식체계의 해는 앞서 설명한 여러 가지 해를 구하는 방법을 이용하여 아래와 같은 형태로 표현하는 것이다.

$$\xi_{t+1} = F(\mu)\xi_t + e_{t+1}$$

IV

신케인지언 DSGE 모형

1. 가격이 신축적인 일반균형모형에서의 화폐의 역할
2. 명목가격의 경직성
3. 신케인지언 DSGE모형을 이용한 통화정책분석

IV. 신케인지언 DSGE 모형

신케인지언 DSGE모형을 설명하기에 앞서 우선 일반균형모형에서 화폐가 도입되는 과정을 효용함수에 화폐를 직접 도입한 MIU(Money in utility) 모형을 중심으로 살펴볼 필요가 있다. 왜냐하면, 기본적인 RBC 모형은 화폐가 없는 비화폐경제(Nonmonetary economy)이다. 즉, 화폐와 같이 제로(0)의 명목수익률을 가진 자산이 존재하지 않으며, 따라서 이 자수익을 주는 다른 자산으로 할인하지도 않는다. 그렇다면 Monetary issues를 분석하기 위해 신고전학파의 성장모형에 어떻게 화폐를 도입할 것인가? 만약 화폐가 보유함으로써 어떤 양의 가치를 갖는다면 화폐에 대한 양(+)의 수요가 존재할 것이다.

화폐를 일반균형모형에 도입하기 위해 주요 두 방향으로 접근이 이루어졌다. 첫째는 화폐가 직접적인 효용을 가져온다고 가정하고 경제 주체의 효용함수에 화폐잔고를 직접 도입한 Sidrauski(1967)의 MIU 모형이다. 둘째는 거래비용이 존재함으로써 이를 줄이기 위해 화폐 수요가 존재하는 가정하는 Cash-in-advance (CIA)모형이다. 대표적으로는 Baumol (1952)과 Tobin (1956)의 모형이 있으며, 어떤 형태의 거래를 하기 위해서는 화폐가 필요하게 하거나(Clower 1967), 소비재를 얻기 위해서는 시간과 돈이 결합한 거래서비스가 필요하다거나 혹은 물물교환에는 거래비용이 든다고(Kiyotaki and Wright, 1989) 가정한다. 이하에서 설명한 주요내용에 대해서는 Walsh(2003)의 제2,5장을 참조하기 바란다.

1. 가격이 신축적인 일반균형모형에서의 화폐의 역할

우선 가격과 임금이 완전히 신축적(perfectly flexible)하다고 가정한 MIU모형에서 화폐가 가지는 역할에 대해서 알아보자. 불확실성이 없고, 여가에 대한 선택이 생략된 간단한 모형을 생각해 보자.

대표적인 가계의 효용함수가 다음과 같다면,

$$U_t = u(c_t, z_t)$$

여기서 c_t 는 t 기의 일인당 소비, z_t 는 화폐를 보유함으로써 얻는 t 기의 서비스이며, 효용은 두 변수에 대해 증가함수이며 강오목하고 연속적으로 미분가능하다고 가정한다. 그리고 z_t 가 실질화폐보유량에 비례한다면 z_t 를 일인당 실질화폐보유량으로 설정할 수 있을 것이다.

$$z_t = \frac{M_t}{P_t N_t} \equiv m_t$$

가계의 문제:

$$\begin{aligned} \max_{c_t, m_t} W &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, m_t) \\ s.t. & \text{ 예산 제약식} \end{aligned} \quad (1)$$

경제전체의 가계부분의 예산 제약식을 유도하기 위해 가계는 실물 자본(K_t), 화폐, 그리고 명목이자수익 i_t 를 주는 채권을 소유할 수 있으

며, 주어진 실질소득(Y_t)과 자산, 그리고 정부로부터의 이전소득(τ_t)하에서 소비와 투자, 그리고 실질화폐잔고와 유가증권보유를 결정한다고 가정한다.

$$\begin{aligned} Y_t + \tau_t N_t + (1-\delta)K_{t-1} + \frac{(1+i_{t-1})B_{t-1}}{P_t} + \frac{M_{t-1}}{P_t} \\ = C_t + K_t + \frac{M_t}{P_t} + \frac{B_t}{P_t} \end{aligned} \quad (2)$$

위에서 K_{t-1} 은 t 기 시작점에서의 스톡이며 감가상각률은 δ , 가계에 효용을 주는 실질화폐(M_t/P_t)는 t 기 말에서의 잔고를 의미한다.

경제전체의 생산함수는 $Y_t = F(K_{t-1}, N_t)$ 이고 일차동차의 CRS(Constant return to scale)를 가정하면 아래와 같이 일인당 자본스톡의 함수로 나타낼 수 있다.

$$y_t = f\left(\frac{k_{t-1}}{1+n}\right) \quad (3)$$

여기서 n 은 상수인 인구증가율이며, 생산함수 f 는 연속미분가능하고 Inada 조건을 만족($f_k > 0$, $f_{kk} < 0$, $\lim_{k \rightarrow 0} f_k(k) = \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(k) = 0$) 한다고 가정한다.

예산제약식을 per capita 형태로 나타내면

$$\begin{aligned} \omega_t \equiv f\left(\frac{k_{t-1}}{1+n}\right) + \tau_t + \left(\frac{1-\delta}{1+n}\right)k_{t-1} + \frac{(1+i_{t-1})b_{t-1} + m_{t-1}}{(1+\pi_t)(1+n)} \\ = c_t + k_t + m_t + b_t \end{aligned} \quad (4)$$

위에서 π_t 는 인플레이션을, $b_t = B_t/P_t N_t$, $m_t = M_t/P_t N_t$.

따라서 가계의 문제는 (4)식의 예산제약하에서 (2)를 최대화하는 c_t, k_t, b_t, m_t 의 경로를 찾는 동태적 최적화문제이다. 가치함수를 이용하여 문제를 공식화할 수 있으며, 가치함수는 주어진 현상태(ω_t : 상태변수)하에서 최적으로 행동했을 때 얻을 수 있는 최대화된 효용을 준다.

$$V(\omega_t) = \max \{u(c_t, m_t) + \beta V(\omega_{t+1})\} \quad (5)$$

위에서 최대화 문제는 예산제약식 (4)와 ω_{t+1} 을 만족한다.

$$\omega_{t+1} = f\left(\frac{k_t}{1+n}\right) + \tau_{t+1} + \left(\frac{1-\delta}{1+n}\right)k_t + \frac{(1+i_t)b_t + m_t}{(1+\pi_{t+1})(1+n)}$$

(4)식으로부터 $k_t = \omega_t - c_t - m_t - b_t$ 을 이용하여 가치함수를 다시 쓰면

$$\begin{aligned} V(\omega_t) = \max \{ & u(c_t, m_t) \\ & + \beta V\left(\frac{f(\omega_t - c_t - m_t - b_t)}{1+n} + \tau_t + \left(\frac{1-\delta}{1+n}\right)(\omega_t - c_t - m_t - b_t) \right. \\ & \left. + \frac{(1+i_t)b_t + m_t}{(1+\pi_{t+1})(1+n)}\right) \} \end{aligned}$$

이제 무제약하의 c_t, b_t, m_t 에 관한 문제가 된다.

FOCs:

$$u_c(c_t, m_t) - \frac{\beta}{1+n} [f_k(k_t) + (1-\delta)] V_\omega(\omega_{t+1}) = 0 \quad (6)$$

\

$$\frac{1+i_t}{(1+\pi_{t+1})(1+n)} - \left[\frac{f_k(k_t) + (1-\delta)}{1+n} \right] = 0 \quad (7)$$

$$u_m(c_t, m_t) - \beta \left[\frac{f_k(k_t) + (1-\delta)}{1+n} \right] V_\omega(\omega_{t+1}) + \frac{\beta V_\omega(\omega_{t+1})}{(1+\pi_{t+1})(1+n)} = 0 \quad (8)$$

말기(Transversality) 조건:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \lambda_t x_t = 0, \text{ for } x = k, b, m \quad (9)$$

여기서 λ_t 는 t 기 소비의 한계효용이다. 포락선 정리(Envelope theorem)에 따라

$$\lambda_t = u_c(c_t, m_t) = V_\omega(\omega_t) \quad (10)$$

(6), (10)식을 이용하여 (8)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u_m(c_t, m_t) + \frac{\beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1})}{(1+\pi_{t+1})(1+n)} = u_c(c_t, m_t) \quad (11)$$

위식은 실질잔고를 t 기에 한 단위 증가시킴으로써 얻을 수 있는 한

계편익과 t 기 소비의 한계효용이 같아야 함을 나타낸다. 여기서 실질잔고의 한계편익은 화폐보유 자체로부터 얻는 편익(u_m)과 $t+1$ 기에 $1/(1+\pi_{t+1})(1+n)$ 만큼 소득이 증가하여 이로부터 얻는 소비의 한계효용($\beta V_w(\omega_{t+1})$)의 증가분으로 이루어져 있다.

(6), (7), 그리고 위의 (11)식을 이용하여

$$\begin{aligned}\frac{u_m(c_t, m_t)}{u_c(c_t, m_t)} &= 1 - \left[\frac{1}{(1+\pi_{t+1})(1+n)} \right] \frac{\beta u_c(c_{t+1}, m_{t+1})}{u_c(c_t, m_t)} \\ &= 1 - \frac{1}{(1+r_t)(1+\pi_{t+1})} = \frac{i_t}{1+i_t} \equiv \wp\end{aligned}\quad (12)$$

위에서 $1+r_t = 1+f_k(k_t)-\delta$ 자본에 대한 실질총수익률이다. (12)식의 $\wp$ 는 소비재의 가격으로 표시된 실질잔고의 상대가격이라고 해석할 수 있다. 즉, 실질잔고와 소비와의 한계대체율이 화폐보유의 기회비용으로 표시된 것이다. 가계는 화폐를 소유하는 대신 이를 채권에 투자해 i 의 수익을 얻을 수 있으며 이의 실질가치는 $t+1$ 기에 받게 되므로 $i/(1+\pi)$, 현재가치는 $i/(1+\pi)(1+r)$ 이 된다. 만약 모형에서 가계가 t 기 말의 실질잔고에서 효용을 얻는 것이 아니라 t 기 초의 실질잔고를 기준으로 효용을 얻는다고 가정한다면 화폐와 소비와의 한계대체율은 i 가 될 것이다.

또한 식 (7)은 채권에 대한 수익률, 인플레이션, 실물자본에 대한 수익률간의 관계를 보여준다.

$$1+i_t = [1+f_k(k_t)-\delta](1+\pi_{t+1}) = (1+r_t)(1+\pi_{t+1}) \quad (13)$$

위의 관계를 Fisher Relationship이라고 하며, x 와 y 가 작은 값일 때 $(1+x)(1+y) \approx 1+x+y$ 임을 이용하면 아래와 같이 표현되기도 한다.

$$i_t = r_t + \pi_{t+1}$$

모형경제가 균형상태에 있을 때는 어떤 모습일까?

우선 화폐시장에서는 명목화폐수요와 외생적으로 주어진 화폐공급이 일치하며, 모든 가계가 동일하므로 채권의 스톡은 제로(0)가 될 것이다.

가계의 최적화 1계조건을 유도하기 위해 만약 가계가 기업에게 자본을 대여하고 r_k 를 받고 노동을 공급하여 w 의 실질임금을 받는다고 가정했다면, 가계의 총수입은 일인당 $r_k k + w$ 가 될 것이다. 그리고 경쟁적 기업이 완전 경쟁적 요소시장에서 노동과 자본을 고용하고 CRS의 생산기술을 가지고 생산한다면 $r_k = f_k(k)$, $w = f(k) - k f_k(k)$ 이고 가계의 총수입은 $f_k(k)k + [f(k) - f_k(k)k] = f(k)$ 가 되어 (4)식의 예산제약식과 같은 결과를 얻게 된다.

우리의 관심은 모형의 정상상태에서 균형의 성격과 모형이 불확실성, 노동과 여가의 선택, 그리고 변동하는 고용이 존재하는 확률적 모형으로 확대되었을 때 함의하는 거시경제변수의 동태적 성격에 있다.

가. 정상상태 균형

모형의 정상균형의 성질을 보기위해 우선 인구증가율 $n=0$, 외생적인 통화증가율은 θ , 위첨자 s 는 정상균형에서 측정한 경제변수의 값이라고 가정하자. 균형에서 경제전체의 채권스톡은 제로가 되며 실질잔고가 일정하므로 물가상승률은 $\pi^s = \theta$ 이 된다. 따라서 가계의 일계

최적화 조건 (6), (7), (8)은 아래와 같이 쓸 수 있다.

FOCs:

$$u_c(c^s, m^s) - \beta[f_k(k^s) + (1 - \delta)] V_\omega(\omega^s) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{1 + i^s}{(1 + \theta)} - [f_k(k^s) + (1 - \delta)] = 0 \quad (15)$$

$$u_m(c^s, m^s) - \beta[f_k(k^s) + (1 - \delta)] V_\omega(\omega^s) + \frac{\beta V_\omega(\omega^s)}{(1 + \theta)} = 0 \quad (16)$$

$$f(k^s) + \tau^s + (1 - \delta)k^s + \frac{m^s}{1 + \theta} = c^s + k^s + m^s \quad (17)$$

이 경제의 정상상태(의 성질은 아래와 같이 요약할 수 있다.

i) 화폐의 중립성: 명목통화량 M 이 변화해도 물가 P 가 여기에 비례하여 변화하여 실질잔고 m 은 불변이며 경제의 균형에 영향을 미치지 않는다. 그러나 만약 물가가 즉각 조정되지 않는다면 단기에는 통화의 중립성이 성립하지 않을 것이다. 식(10)과 (14)를 이용하면

$$f_k(k^s) = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta \quad (18)$$

위 식은 균제균형에서 자본-노동 비율 k 를 규정한다. 콥더클라스 생산함수를 가정하면 $f(k) = k^\alpha$, $f_k(k) = \alpha k^{1-\alpha}$ 이며, 균제균형상태에서 자본-노동비율은

$$k^s = \left(\frac{\alpha\beta}{1+\beta(\delta-1)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (19)$$

균형에서 k 의 수준은 β 이외의 다른 효용함수의 파라미터값에 독립적이며, 인플레이션에도 독립적이며, 생산함수와 감가상각률에만 의존한다.

또한 이 모형에서 명목화폐는 가계의 Lump-sum으로 이전되는 것으로 가정된다. 따라서 이전되는 명목화폐의 실질가치는 $(M_t - M_{t-1})/P_t$ 이며, 균형에서 $\tau^s = m^s - m^s/(1+\pi^s) = \theta m^s/(1+\theta)$ 가 되며, 식 (17)의 예산제약은

$$c^s = f(k^s) - \delta k^s \quad (20)$$

균제균형에서 k 가 결정되면 소비수준도 아래와 같이 결정된다.

$$c^s = \left(\frac{\alpha\beta}{1+\beta(\delta-1)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta \left(\frac{\alpha\beta}{1+\beta(\delta-1)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (21)$$

균제균형에서의 소비수준은 생산함수의 α , 감가상각률 δ , 주관적 시간할인을 β 에 의해서 결정된다.

ii) 화폐의 초중립성: 모형은 균형상태에서의 소비, 생산량, 자본-노동비율이 명목화폐량 M 뿐 아니라 명목통화증가율 $\theta =$ 인플레이션율에도 독립적이다. 왜 화폐의 초중립성이 성립하는지 살펴보기 위해 식(6)은 식 (10)의 $u_c = V_w(\omega_t)$ 이용하여 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{u_c(c_{t+1}, m_{t+1})}{u_c(c_t, m_t)} = \frac{1/\beta}{f_k(k_t) + 1 - \delta} \quad (21)$$

그렇다면 인플레이션율에 영향을 받는 것은 무엇인가?

식 (13)으로부터 $1 + i_t = (1 + r_t)(1 + \pi_{t+1})$ 이고 균제균형에서 $1 + r^s = 1/\beta$, $\pi^s = \theta$ 이므로 균제균형에서 명목이자율은 $i^s = (1 + \theta)/\beta - 1$ 으로 대략 인플레이션율과 일대일의 관계가 성립함을 알 수 있다.

식(12)는 실질화폐수요 명목이자율과 실질소비의 함수임을 보여준다. 예를 들어 효용함수가 아래와 같은 CES 형태라면

$$u(c_t, m_t) = [ac_t^{1-b} + (1-a)m_t^{1-b}]^{\frac{1}{1-b}} \quad (23)$$

$$\frac{u_m}{u_c} = \left(\frac{1-a}{a} \right) \left(\frac{c_t}{m_t} \right)^b$$

위를 이용하면 (12)식은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$m_t = \left(\frac{1-a}{a} \right)^{\frac{1}{b}} \left(\frac{i}{1+i} \right)^{-\frac{1}{b}} c_t \quad (24)$$

실증적 화폐수요함수를 유도하기 위해 로그함수 형태로 위식을 변환하면(Goldfeld and Sichel 1990),

$$\ln \frac{M_t}{P_t N_t} = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{1-a}{a} \right) + \ln c_t - \frac{1}{b} \ln \frac{i}{1+i} \quad (25)$$

실질화폐수요는 소비(소득)과는 양(+)의 관계를 명목이자율과는 음(-)의 관계를 갖는다. 화폐수요의 이자율 탄력성은 $1/b$ 이며, $b=1$ 이면 화폐수요의 이자율 탄력성과 소비탄력성이 모두 1이 된다.

Ireland(2001)은 일반균형모형의 한 부분으로서 미국에 대한 화폐수요의 이자율 탄력성을 추정하였으며 1979년 이전에는 0.19 이후에는 0.12로 나타났다. 이는 b 값이 각각 5.26과 8.33을 의미한다.

나. 모형의 동학

지금까지는 모형이 정상균형에서 갖는 성격에 대해서 알아보았다.

그렇다면 외생적인 충격에 모형은 어떻게 반응할까? 외생적인 충격에 따라 이 모형경제가 어떻게 반응하고 적응해나가는지 관심이 있는 것이다. 기본적인 MIU 모형조차도 정상균형으로의 이행기간 동안에는 화폐의 초중립성이 성립하지 않을 수 있다. Fisher(1979)는 CRRA류의 효용함수에 대해서 자본축적과 통화증가율이 양의 관계를 갖고 있음을 보였다. 그러나 효용함수가 로그 분리가능한 $u(c, m) = \ln(c) + b \ln(m)$ 인 경우에는 기간에도 화폐의 초중립성이 성립한다.

모형이 현실경제를 이해하는 데 도움을 주는 한 가지 방법이 이론적인 모형경제를 시뮬레이션을 통해 가상의 시계열 자료를 생성해 내는 것이다. 이를 실제의 시계열과 비교함으로써 모형의 타당성을 평가할 수 있다. (Cooley 1995) 이러한 시뮬레이션 기법은 실물경기변동이론(RBC)에서 널리 사용되었다. 이를 통해 현실에서는 불가능한 모형의 모

수값을 변화시켜면서 다양한 'What if'라는 질문에 답을 할 수 있을 것이다.

복잡한 비선형구조인 모형의 최적화 조건을 로그선형 근사화하여 분석적인 해를 구하고 이를 통해 i) 생성된 가상의 시계열을 이용해 현실의 Stylized facts와 비교 분석할 수도 있고, ii) 모형에 생산성이나 통화 충격을 주어 균형에서 벗어난 경제가 어떻게 반응하는지를 분석할 수도 있을 것이다. 모형이 정상상태 주위에서 어떠한 동태적 성격을 가지는지 분석하는 것이다.

이를 위해서 아래와 같이 생산함수와 효용함수, 외생적 충격의 성격을 설정하여 분석해 보자. 이하에서 대문자는 경제전체의 변수, 소문자는 일인당으로 표시한 것이며 $\wedge$ 은 변수의 정상상태균형에서의 퍼센티지 편차를 의미한다. 그러나 이자율 $\hat{i}, \hat{r}$ 은 편차가 아닌 퍼센티지를 의미한다.

$$\text{생산함수: } Y_t = e^{z_t} K_{t-1}^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \quad (26)$$

$$\text{생산성 충격: } z_t = \rho z_{t-1} + e_t \quad (27)$$

또한 명목통화량에 대한 충격을 구성하기 위해 명목통화공급 증가율을 θ_t , 비조건부 평균률 θ^s , $u_t = \theta_t - \theta^s$ 로서 다음과 같은 확률적 과정을 따른다고 하자.

$$\text{명목통화증가율 충격: } u_t = \gamma u_{t-1} + \phi z_{t-1} + \eta_t \quad (28)$$

여기서 η_t 는 백색잡음이다.

효용함수는 Nested CES 함수 형태를 가지며 가계의 효용은 소비와 실질잔고, 노동공급을 결정하는 여가에 의존한다고 가정한다.

$$u(c_t, m_t, l_t) = \frac{1}{1-\Phi} \left[ac_t^{1-b} + (1-a)m_t^{1-b} \right]^{\frac{1-\Phi}{1-b}} + \Psi \frac{l_t^{1-\nu}}{1-\nu} \quad (29)$$

여기서 $0 < a < 1, b, \nu, \Phi, \Psi > 0, b, \nu, \Phi \neq 1$. 극한의 경우에는 $\Phi = b = 1$, 효용함수는 소비와 실질화폐잔고에 로그선형이 된다.

$$u = a \ln c_t + (1-a) \ln m_t + \Psi l_t^{1-\nu} / (1-\nu) \quad (30)$$

Fisher(1979)는 소비와 여가 사이의 한계대체율(MRS)이 실질화폐잔고에 독립적이므로 균형으로의 이행경로가 화폐공급에 독립적임을 보였다. 위와 같은 효용함수는 C_t 를 소비재와 화폐수요의 복합재로 정의하고 아래와 같이 쓸 수도 있다.

$$\frac{C_t^{1-\Phi}}{1-\Phi} + \Psi \frac{l_t^{1-\nu}}{1-\nu} \quad (31)$$

여기서 $C_t = \left[ac_t^{1-b} + (1-a)m_t^{1-b} \right]^{\frac{1}{1-b}}$. 총가용시간을 1로 표준화하면 일인당 노동공급은 $n_t = 1 - l_t$ 로 표시할 수 있다.

이제 위의 구체적인 함수형태를 바탕으로 가계의 경제적 최적화 문

제를 설정하고 최적화의 일계조건과 경제의 균형조건을 만족하는 모형의 내생변수의 경로를 구해야 한다. 그러나 분석적인 해(Analytic solution)을 구하기 위해서는 복잡한 비선형구조로 이루어진 해를 정상상태 주위에서 선형근사화해야 한다.

다. 모형의 해

위의 모형의 결정문제는 가치함수를 이용하여 표현할 수 있다. 앞의 모형처럼 여가와 노동의 선택이 없는 모형에서 상태변수는 아래와 같이 표현되었다.

$$\omega_t = f(k_{t-1}) + \tau_t + (1-\delta)k_{t-1} + \frac{1+i_{t-1}}{1+\pi_t}b_{t-1} + \frac{1}{1+\pi_t}m_{t-1} \quad (32)$$

그러나 여기에서는 y_t 가 실물자본뿐 아니라 가계의 t 기 노동공급에도 의존하므로 상태변수에 포함되지 않는다. 따라서 여기서는 a_t 는 가계의 실질금융자산과 이전수익의 합으로 정의하고 $V(a_t, k_{t-1})$ 는 현재의 상태변수 (a_t, k_{t-1}) 하에서 달성할 수 있는 최대 효용의 현재가치로 정의하자.

$$a_t = \tau_t + \frac{(1+i_{t-1})}{(1+\pi_t)}b_{t-1} + \frac{1}{1+\pi_t}m_{t-1} \quad (33)$$

$$\text{생산함수 } y_t = f(k_{t-1}, n_t, z_t) \quad (34)$$

가계가 직면한 문제에 대한 가치함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V(a_t, k_{t-1}) = \max \{u(c_t, m_t, 1-n_t) + \beta E_t V(a_{t+1}, k_t)\} \quad (35)$$

위의 가치함수는 $(c_t, m_t, b_t, k_t, n_t)$ 에 대한 최대화이며 아래의 예산 제약을 만족한다.

$$f(k_{t-1}, n_t, z_t) + (1-\delta)k_{t-1} + a_t \geq c_t + k_t + b_t + m_t \quad (36)$$

$$a_{t+1} = \tau_{t+1} + \frac{(1+i_t)}{(1+\pi_{t+1})}b_t + \frac{1}{1+\pi_{t+1}}m_t \quad (37)$$

위 문제에서 불확실성은 확률적인 과정을 따르는 생산성과 통화증가율 충격에서 기원하며 이는 가치함수에서 기대치로 표현된다.

$$\begin{aligned} V(a_t, k_{t-1}) = \max_{c_t, m_t, n_t} \{ & u(c_t, m_t, 1-n_t) \\ & + \beta E_t V\left(\tau_{t+1} + \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}b_t + \frac{m_t}{1+\pi_{t+1}}, \right. \\ & \left. f(k_{t-1}, n_t, z_t) + (1-\delta)k_{t-1} + a_t - c_t - b_t - m_t\right) \} \end{aligned} \quad (38)$$

이제 무제약하의 c_t, n_t, m_t, b_t 에 관한 문제가 된다.

1계조건:

$$u_c(c_t, m_t, 1-n_t) - \beta E_t V_k(a_{t+1}, k_t) = 0 \quad (39)$$

$$\beta E_t \left[\left(\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \right) V_a(a_{t+1}, k_t) \right] - \beta E_t V_k(a_{t+1}, k_t) = 0 \quad (40)$$

$$u_m(c_t, m_t, 1-n_t) + \beta E_t \left[\frac{V_a(a_{t+1}, k_t)}{1+\pi_{t+1}} \right] - \beta E_t V_k(a_{t+1}, k_t) = 0 \quad (41)$$

$$-u_l(c_t, m_t, 1-n_t) + \beta E_t V_k(a_{t+1}, k_t) f_n(k_{t-1}, n_t, z_t) = 0 \quad (42)$$

$$V_a(a_t, k_{t-1}) = \beta E_t V_k(a_{t+1}, k_t) \quad (43)$$

$$V_k(a_t, k_{t-1}) = \beta E_t V_k(a_{t+1}, k_t) [1 - \delta + f_k(k_{t-1}, n_t, z_t)] \quad (44)$$

식 (43)을 이용하고 식 (44)을 한 기간 갱신하면

$$V_k(a_{t+1}, k_t) = E_t V_a(a_{t+1}, k_t) [1 - \delta + f_k(k_t, n_{t+1}, z_{t+1})]$$

위를 이용하여 소비에 대한 일계조건 식 (39)을 표현하면

$$u_c(c_t, m_t, 1-n_t) - \beta E_t V_a(a_{t+1}, k_t) [1 - \delta + f_k(k_t, n_{t+1}, z_{t+1})] = 0 \quad (45)$$

또한 식 (39)을 이용하면 노동공급에 대한 일계조건식인 (42)식은

$$\frac{u_l(c_t, m_t, 1-n_t)}{u_c(c_t, m_t, 1-n_t)} = f_n(k_{t-1}, n_t, z_t)$$

위식은 최적에서 여가와 소비와의 MRS는 한계노동생산물과 동일

해짐을 보여준다.

균형에서의 소비, 자본, 화폐보유, 노동공급량은 위의 일계조건을 만족해야 하며 (39)을 이용하여 (41), (42), (45)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u_c(c_t, m_t, 1-n_t) = u_m(c_t, m_t, 1-n_t) + \beta E_t \left[\frac{u_c(c_{t+1}, m_{t+1}, 1-n_{t+1})}{1+\pi_{t+1}} \right] \quad (46)$$

$$u_l(c_t, m_t, 1-n_t) = u_c(c_t, m_t, 1-n_t) \cdot f_n(k_{t-1}, n_t, z_t) \quad (47)$$

$$u_l(c_t, m_t, 1-n_t) = \beta E_t R_t u_c(c_{t+1}, m_{t+1}, 1-n_{t+1}) \quad (48)$$

여기서

$$R_t = 1 - \delta + f_k(k_t, n_{t+1}, z_{t+1}) \quad (49)$$

R_t 는 감가상각을 차감한 자본의 순한계생산물에 1을 더한 실질총 수익율로 볼 수 있다. 또한 일인당으로 표시한 경제전체의 자원제약식은

$$k_t = (1-\delta)k_{t-1} + y_t - c_t \quad (50)$$

$$\text{생산함수} \quad y_t = f(k_{t-1}, n_t, z_t) \quad (51)$$

실질잔고는 시간에 따라 아래와 같은 과정을 따른다.

$$m_t = \left(\frac{1 + \theta_t}{1 + \pi_t} \right) m_{t-1} \quad (52)$$

생산성 충격은 아래와 같은 확률적 과정을 따른다.

$$z_t = \rho z_{t-1} + e_t \quad (53)$$

또한 명목통화량에 대한 충격을 구성하기 위해 명목통화공급 증가율을 θ_t , 비조건부평균을 θ^s , $u_t = \theta_t - \theta^s$ 로서 다음과 같은 확률적 과정을 따른다고 하자.

$$\text{명목통화증가율 충격} \quad u_t = \gamma u_{t-1} + \phi z_{t-1} + \eta_t \quad (54)$$

여기서 η_t 는 white noise, $0 \leq \gamma < 1$ 이다.

식 (46)부터 (54)은 모형의 9개 내생변수 $(y_t, c_t, k_t, m_t, n_t, R_t, \pi_t, z_t, u_t)$ 의 균형값을 결정하는 9개의 비선형 방정식 체계이다. 모형의 분석하기 위해서 다음과 같은 콥-더글라스 생산함수와 Nested CES 효용함수의 구체적인 형태를 가정하자.

$$y_t = e^{z_t} k_{t-1}^\alpha n_t^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$u(c_t, m_t, 1 - n_t) = \frac{1}{1 - \Phi} \left[a c_t^{1-b} + (1 - a) m_t^{1-b} \right]^{\frac{1-\Phi}{1-b}} + \Psi \frac{(1 - n_t)^{1-\nu}}{1 - \nu}$$

여기서 $0 < a < 1, b, \nu, \Phi, \Psi > 0, b, \nu, \Phi \neq 1$. Φ 는 상대적 위험회피계수임과 동시에 기간별 대체탄력성의 역수이고, b 는 실질화폐수요의 이차율 탄력성의 역수이다.

$X_t = [ac_t^{1-b} + (1-a)m_t^{1-b}]$ 라고 놓고 식 (58)-(61)에 해당하는 일계조건을 구해보면,

$$\frac{u_m}{u_c} = \left(\frac{1-a}{a} \right) \left(\frac{m_t}{c_t} \right)^{-b} = \frac{i_t}{1+i_t} \quad (55)$$

$$\frac{u_l}{u_c} = \frac{\Psi(1-n_t)^{-\nu}}{X_t^{\frac{b-\Phi}{1-b}} ac_t^{-b}} = (1-\alpha) \frac{y_t}{n_t} \quad (56)$$

$$X_t^{\frac{b-\Phi}{1-b}} ac_t^{-b} = \beta E_t \left[R_t X_{t+1}^{\frac{b-\Phi}{1-b}} ac_{t+1}^{-b} \right] \quad (57)$$

$$R_t = 1 - \delta + \alpha \frac{E_t y_{t+1}}{k_t} \quad (58)$$

그렇다면 위의 조건이 의미하는 균형은 어떤 것일까? 우선 식 (58)로부터 정상균형에서 $R^s = \beta^{-1}$ 임을 알 수 있고, 이를 (57)에 대입하면 정상상태에서 산출-자본비율은

$$R^s = \beta^{-1}$$

$$\left(\frac{y^s}{k^s} \right) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\beta} - 1 + \delta \right)$$

생산함수로부터 $(y^s/k^s) = (n^s/k^s)^{1-\alpha}$ 혹은 정상상태의 노동-자본비율은

$$\left(\frac{n^s}{k^s}\right) = \left(\frac{y^s}{k^s}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta} - 1 + \delta\right)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

또한 경제전체의 예산제약식으로부터

$$\left(\frac{c^s}{k^s}\right) = \left(\frac{y^s}{k^s}\right) - \delta = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\delta$$

또한 $(1+i^s) = R^s(1+\pi^s)$ 이므로, $1+\pi^s = \Theta$ 라고 하면 $\frac{i^s}{1+i^s} = \frac{\Theta-\beta}{\Theta}$ 라고 쓸 수 있으며 식 (67)를 이용하면 정상상태의 실질 화폐잔고-소비비율을 구할 수 있다.

$$\left(\frac{m^s}{c^s}\right) = \left(\frac{a}{1-a}\right)^{-\frac{1}{b}} \left(\frac{\Theta-\beta}{\Theta}\right)^{-\frac{1}{b}}$$

마지막으로 정상상태의 실질화폐잔고-자본비율은

$$\left(\frac{m^s}{k^s}\right) = \left(\frac{m^s}{c^s}\right) \left(\frac{c^s}{k^s}\right) = \left(\frac{a}{1-a}\right)^{-\frac{1}{b}} \left(\frac{\Theta-\beta}{\Theta}\right)^{-\frac{1}{b}} \left(\frac{c^s}{k^s}\right) \quad (59)$$

정상상태에서 내생변수의 비율로부터 수준(level)을 구하기 위해서는 정상상태에서의 노동공급 n^s 을 결정해주어야 한다. 왜냐하면 인플레이

이션이 정상상태에 영향을 미칠 수 있는 경로는 노동공급의 변화(n^s)를 유발함으로 이루어질 수 있기 때문이다. 약간의 복잡한 계산과정을 거치면 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{(n^s)^\Phi}{(1-n^s)^\nu} = H \left[1 + \left(\frac{a}{1-a} \right)^{-\frac{1}{b}} \left(\frac{\Theta - \beta}{\Theta} \right)^{\frac{b-1}{b}} \right]^{\frac{b-\Phi}{1-b}} \quad (60)$$

여기서 $H \equiv \left(\frac{1-\alpha}{\Psi} \right) \left(\frac{y^s}{k^s} \right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} a^{\frac{1-\Phi}{1-b}} \left(\frac{c^s}{k^s} \right)^{-\Phi} \left(\frac{k^s}{n^s} \right)^{-\Phi}$ 이고 인플레이션이나 통화증가율(Θ)에 독립적이다.

정상상태 주위에서 모형을 선형근사 시키기 위해서 다음과 같은 기본법칙이 적용된다(Uhlig 1999). 우선 $x_t \equiv x^s(1+\hat{x})$ 이며 두 변수 x 와 y 에 대해서

- i) $xy = x^s(1+\hat{x})y^s(1+\hat{y}) = x^sy^s(1+\hat{x}+\hat{y}+\hat{x}\hat{y}) \approx x^sy^s(1+\hat{x}+\hat{y})$
- ii) $x^a = (x^s)^a(1+\hat{x})^a \approx (x^s)^a(1+a\hat{x})$
- iii) $\ln x = \ln x^s(1+\hat{x}) = \ln x^s + \ln(1+\hat{x}) \approx \ln x^s + \hat{x}$

선형근사화된 모형은 앞 장에서 설명한 방법을 이용하여 해를 구할 수 있을 것이다.

2. 명목가격의 경직성

지금까지의 주요 실증분석 결과들을 요약해 보면 양(+)의 화폐 충격이 발생했을 경우 산출양에는 역U자 모형의(hump-shaped) 양(+)의 반응이 존재하는 것으로 나타난다. 이제 왜 이러한 반응이 일어나는지 대답해야 한다. 즉, 왜 화폐적 충격이 실물에 영향을 주는지 대답해야 한다.

인플레이션이 주는 조세효과 때문인가? 아니면 다른 채널들을 통해 통화충격이 실질효과를 가지는 것인가? 통화정책이 실물경제에 어떤 영향을 주는지와 정책변화가 경제주체의 행동에 어떻게 영향을 미치는지 이해하는 것은 좋은 정책을 설계하고 시행하는 데 대단히 중요하다.

앞에서 살펴본 MIU 모형에서도 인플레이션이 실질산출량에 영향을 미치며 이는 기대인플레이션율의 변화와 이에 따른 실질화폐잔고와 소비와의 대체효과에 기인한 것이었다. 그러나 시뮬레이션을 통해 보면 대체효과에 기인하는 산출량의 변화는 실증적인 여러 가지 증거를 통해서 본 통화충격의 실물효과를 설명하기에는 너무 작은 것으로 나타난다. 또한 여러 나라의 실증분석을 통해 보면 실제 인플레이션은 통화충격에 느리게 점차적으로 반응하는 것으로 보인다. 그렇다면 기대인플레이션도 마찬가지여야 한다. 즉, 위의 모형은 기대인플레이션의 즉각적인 변화와 이에 따른 노동공급의 변화를 통한 산출량 변화를 시사하고 있어 실증자료와 부합하지 않는다.

이에따라 인플레이션이 가지는 조세효과 분석으로부터 벗어나 정책변화에 따른 실질이자율변화와 이에 따른 소비결정의 변화에 주목할 필요가 있다. 앞선 모형에서는 신축적인 가격과 개인의 최적화 행동에 기반을 둔 일반균형의 틀 안에서 문제를 분석하였다면, 여기에서는 명목가격의 경직성과 개인의 최적화 행동에 기반을 둔 일반균형의 틀 안에

서 통화정책의 당면한 문제를 분석하는 모형을 살펴볼 필요가 있는 것이다.

물론, 명목가격과 임금이 유연하다는 가정을 유지하고서 앞선 모형에서와는 다른 경로를 통한 화폐의 실물효과를 연구한 결과도 많다. 이들 연구는 정보의 불완전성과 분배효과를 통한 경로를 통해 단기적으로 통화충격이 실질효과를 갖는 것에 주목한다.

여기에서는 먼저 명목가격과 임금이 유연하다는 가정을 유지하고서 화폐의 실질효과를 분석하는 모형을 간단히 요약하고, 명목 가격과 명목임금이 경직적일 때 통화충격과 통화정책이 실물경제에 어떻게 영향을 미치는지 기본적인 신케인지언 DSGE모형을 가지고 살펴볼 것이다.

명목가격의 경직성은 왜 중요한가? 명목통화량은 두 경로를 통해서 균형에 영향을 미친다. 첫째, 명목통화증가율의 변화는 인플레이션을 변화시킨다. 인플레이션의 변화는 기대인플레이션의 변화를 가져오고 이는 화폐보유의 기회비용인 명목이자율의 변화를 가져온다. 이는 노동과 여가선택, 화폐보유와 다른 금융자산의 선택에 영향을 미쳐 실물효과를 가져온다. 그러나 실증자료는 이러한 대체효과가 크지 않음을 시사하고 있다. 둘째, 화폐는 가계의 예산제약식, CIA 제약식, 실질잔고로 형태로 효용함수에 포함되어 있다. 만약 가격이 완전히 유연하다면 통화정책을 통한 명목통화량의 변화는 실질통화량에 영향을 미치지 않을 것이다. 그러나 가격이 경직적이라면 명목통화량의 변화가 실질통화량을 변화시키고 이는 경제의 실질균형 상태에도 영향을 미치게 될 것이다. 즉, 단기에 존재하는 가격의 경직성은 통화충격과 통화정책의 역할을 증대시키게 되는 것이다.

가. 신축적인 가격 가정하의 모형

앞에서 본 것처럼 가격의 유연성을 유지하면서 화폐가 실질효과를 가지는 것은 예상된 통화증가율의 변화와 기대인플레이션율의 변화에 따른 대체효과 때문이었으나 실증분석에서 나타난 화폐의 단기적인 실물효과를 설명하기에는 너무 작은 것으로 나타났다. 이에 따라 가격의 유연성 가정을 유지한 채 화폐의 실질효과를 설명하기 위해서 두 가지 접근법이 주로 이용되었다. 첫째는 경제전체의 상황에 대한 잘못된 이해(misconception)에 따른 정보효과에 주목하는 것이고(Lucas, 1972), 둘째는 금융시장에서의 거래제약에 따른 효과에 주목하는 것이다.

(1) 불완전한 정보: Lucas (1972)

Lucas(1972)는 예상치 못한 통화량 변화가 단기적으로 어떻게 일시적인 실물효과를 가지는지를 물리적으로 분리된 시장을 가진 중첩세대 모형(overlapping generation model)의 틀 안에서 보여주었다. 그의 모형에서 개인은 두 세대동안 생존하고 새로운 세대는 무작위로 각 시장(섬)에 배분되며, 각 시장의 개인들은 경제전체의 물가수준, 통화량에 대한 불완전한 정보를 가지고 있다고 가정된다. 그리하여 각자의 섬에서 물가수준이 변화하면 그 변화가 단순히 경제전체의 물가수준의 변화인지 아니면 그 섬의 물가에만 특정한 상대 물가의 변화인지를 결정해야 하는 신호추출 문제에 직면해 있다.

이러한 불완전 정보모형을 분석하기 위해 기본적인 MIU 모형에 이를 단순화하기 위해 다음과 같이 가정한다. 첫째, 경제에는 자본이 존재하지 않고 따라서 투자도 없으며 균형에서 소비와 투자는 일치한다. 둘째, 화폐만이 유일하게 존재하는 금융자산이다. 셋째, 이전소득을 통

해 이루어지는 명목통화량의 변화는 보유한 현금에 비례한다고 가정한다. 세 번째 가정은 이전소득이 현금보유에 따른 일종의 이자로 볼 수 있게 하여 인플레이션 세금의 효과를 모형에서 제거하여 줌으로써 불완전정보가 경제에 미치는 효과를 분석하는 문제에 초점을 맞출 수 있게 해 줄 수 있을 것이다.

대표적 개인의 효용함수:

$$u\left(C_t, \frac{M_t}{P_t}, 1-N_t\right) = \frac{1}{1-\Phi} \left[aC_t^{1-b} + (1-a)\left(\frac{M_t}{P_t}\right)^{1-b} \right]^{\frac{1-\Phi}{1-b}} + \Psi \frac{(1-N_t)^{1-\nu}}{1-\nu} \quad (61)$$

소문자는 정상상태에서의 로그차분값이고 x_t^i 는 섬 i의 변수값이며 x_t 는 경제전체의 평균값이다.

균형에서 $y^i = c^i$ 인 섬 i에서의 균형조건은 다음의 일계조건으로 요약할 수 있다.

$$y_t^i = (1-\alpha)n_t^i \quad (62)$$

$$\left[1 + \nu \left(\frac{n^s}{l^s} \right) \right] n_t^i = y_t^i + \lambda_t^i \quad (63)$$

$$m_t^i - p_t^i = y_t^i + \left(\frac{1}{b} \right) \left(\frac{\beta}{1-\beta} \right) \left[E_t^i \tau_{t+1} - (E_t^i p_{t+1} - p_t^i) + E_t^i (\lambda_{t+1} - \lambda_t^i) \right] \quad (64)$$

여기서 $\lambda_t^i = -\Omega_1 y_t^i + \Omega_2 (m_t^i - p_t^i)$ 이며 소비의 한계효용이다.

$$\Omega_1 = [\mu\Phi + (1-\mu)b], \quad \Omega_2 = (b-\Phi)(1-\mu)$$

$$\mu = \frac{a}{a + (1-a) \left[\left(\frac{M}{CP} \right)^s \right]^{1-b}}$$

소문자 m^i 이 앞선 MIU모형 분석에서는 실질화폐량을 의미했지만 여기서는 시장(섬) i 의 명목화폐량임에 주의하라. 조건식 (62)은 생산함수로부터 유도되고, 식 (63)은 여가의 한계효용과 소비의 한계효용, 그리고 실질임금의 관계로부터 나온다. 식 (64)는 개인의 실질잔고보유량에 대한 일계조건으로부터 유도된 것이다.

$$u_{ct}^i = u_{mt}^i + \beta E_t^i \left(\frac{T_{t+1}}{\Pi_{t+1}} \right) u_{ct+1}^i \quad (65)$$

위 식은 왼쪽항은 소비재 한 단위를 포기할 때의 효용으로 표시한 기회비용을 표시하고 오른쪽항은 이를 통해 얻는 추가적인 t 기의 화폐잔고로 인해 얻는 화폐의 한계효용과 화폐잔고에 비례하여 t 기와 $t+1$ 기 사이에 주는 실질이전수의 때문에 생기는 추가적인 소비의 효용의 합이다. T_{t+1} 는 한 단위의 화폐를 보유함으로써 얻는 총이전수익이고 Π_{t+1} 는 t 기와 $t+1$ 기 사이의 인플레이션에 1을 더한 것이다. 각 섬의 개인이 서로 다른 정보를 가지고 형성한 기대치는 E^i 로 나타낸다.

주어진 구체적인 효용함수에서 (65)식은 아래와 같이 쓸 수 있다.

경제전체의 평균명목통화량은 아래와 같은 과정을 따른다.

$$m_t = \gamma m_{t-1} + v_t + u_t \quad (66)$$

u_t, v_t 는 전체경제의 통화충격이며 각각 평균이 제로이고 σ_v^2, σ_u^2 의 분산을 갖고, v_t 의 값은 t 기초에 알려져 있는 공개된 정보이지만 u_t 는 그렇지 않다.

시장 i 의 명목통화공급량은 아래의 과정을 따른다.

$$m_t^i = \gamma m_{t-1} + v_t + u_t + u_t^i \quad (67)$$

여기서 $u_t^i \sim (0, \sigma_i^2)$ 인 i 에 특정한 통화충격이다. 만약 t 기에 경제전체의 통화량 m_{t-1} 이 알려진 정보라면 시장 i 의 개인은 m_t^i 를 관측함으로써 $u_t + u_t^i$ 에 대해서 추론할 수 있지만 각각의 충격을 구분할 수 없다. $\gamma \neq 0$ 인 한 u_t 에 대한 정보는 m_{t+1} 을 예측하는 데 유용하다. 왜냐하면 $m_{t+1} = \gamma(\gamma m_{t-1} + v_t + u_t) + v_{t+1} + u_{t+1}$ 이므로 시장 i 에서 t 기에 이용 가능한 정보에 기초한 $t+1$ 기 경제전체의 통화량에 대한 조건부 기대치는 아래와 같다.

$$E_t^i m_{t+1} = \gamma^2 m_{t-1} + \gamma v_t + \gamma E_t^i u_t^i$$

만약 $E_t^i u_t^i$ 가 선형최소자승법에 의해 형성된다고 가정하면

$$E_t^i u_t^i = \kappa(u_t + u_t^i)$$

이때 $\kappa = \sigma_u^2 / (\sigma_i^2 + \sigma_u^2)$. 즉 만약 총통화공급충격이 특정시장의 통화충격에 비해 크다면 κ 는 1에 가까워질 것이고, 통화충격의 대부분이 경제전체의 통화충격에서 비롯되었다고 추론할 수 있을 것이다.

균형에서의 경제전체의 가격과 고용수준의 해는 다음과 같다.

$$p_t = \gamma m_{t-1} + v_t + \left(\frac{\kappa + K}{1 + K} \right) u_t \quad (68)$$

$$n_t = A(m_t - p_t) = A \left(\frac{1 - \kappa}{1 + K} \right) u_t \quad (69)$$

$$\text{여기서 } A = \frac{\Omega_2}{1 + \nu \left(\frac{n^s}{l^s} \right) - (1 - \Omega_1)(1 - \alpha)} \quad , \quad K = \frac{1 - (1 - \alpha)A}{\left(\frac{1}{b} \right) \left(\frac{\beta}{1 - \beta} \right)}$$

경제전체의 총통화이전지출 τ_t :

$$\tau_t = m_t - m_{t-1} = (\gamma - 1)m_{t-1} + v_t + u_t$$

(2) 제한된 참여와 유동성 효과

통화충격이 시장이자율에 주는 영향은 기대실질이자율에 주는 영향과 기대인플레이션에 주는 영향으로 분해할 수 있다. 만약 통화증가율

이 양(+)'의 자기상관을 갖는다면 통화증가율의 상승은 기대인플레이션의 상승으로 이어질 것이다. 유연한 가격하의 MIU 모형에서 통화증가율의 상승은 즉각적인 명목이자율의 상승을 가져왔다.

대부분의 경제학자들과 정책입안자들은 빠른 통화증가율을 통해 '단기적으로' 명목이자율을 줄 일 수 있다고 본다. 이는 빠른 통화증가율이 단기적으로는 유동성 효과(Liquidity Effect)를 통해 명목이자율이 하락한다고 보는 것이다. 유동성효과는 확장적인 통화정책이 실질소비, 투자, 산출량에 영향을 미치는 중요한 경로 중에 하나인 것이다.

신축적인 가격 모형을 통해 유동성 효과를 분석하고자 하는 많은 연구가 이루어졌다. (Lucas 1990; Christiano 1991; Christiano and Eichenbaum 1992, 1995; Fuerst 1992; Dotsey and Ireland 1995; King and Watson 1995; Cooley and Quadrini 1999). 이들의 모형에서는 경제 주체가 일정한 형태의 금융거래를 할 수 없다는 제약을 가함으로써 통화충격이 실질이자율에 영향을 미치도록 설계되어 있다. 예를 들어 Lucas는 기본적인 CIA 모형에서 이질적인 경제주체를 가정함으로써 통화증가가 경제주체에게 균등하게 배분되지 않음에 따른 실질잔고효과를 통해서 유동성효과를 분석하고 있다.

Fuerst(1992)와 Christiano and Eichenbaum(1992)은 기본적인 CIA 모형에서 가계와 기업, 금융기관을 구분함으로써 유동성효과가 일어나는 경로를 설명한다. 기본적인 CIA 모형에서는 통화량 증가분이 균등하게 비례적으로 모든 경제 주체에게 배분된다. 따라서 물가수준의 비례적인 상승이 경제주체의 실질잔고를 변화시키지 못한다. 그러나 만약 최초의 통화증가분이 오직 금융기관에만 영향을 미친다면 균형에서 명목이자율이 양(+)'인 이상 금융기관은 늘어난 만큼의 자금을 대출하기 위해서 대출이자율을 감소시켜야 할 것이다. 거래제약이 통화증가가 가계가 가지고 있는 현금 가치와 금융기관이 보유하고 있는 현금사이에

차이(wedge)를 가져오는 것이다. 또한 가정에 따라 기업이 노동을 고용하기 위해서는 금융기관에서 자금을 빌려야 하는 데 금융기관이 대출이자율을 낮춤에 따라 기업의 입장에서는 노동의 한계비용인 실질임금과 총명목이자율의 곱이 감소하여 고용이 증가하고 이에 따라 산출량이 증가하게 되는 것이다.

그러나 Dotsey and Ireland(1995), King and Watson(1996)이 보여주는 것처럼 금융거래에 제약을 가함으로써 통화정책이 유동성효과를 통해 명목이자율을 감소시키킴으로써 실물경제에 영향을 미치는 채널로 설명하는 모형은 실제 데이터에 나타난 명목이자율의 감소 크기를 설명하지 못하고 있다. Christiano, Eichenbaum, and Evans(1996)는 임금의 노동공급탄력성이 대단히 큰 값을 가져야 만이 그들의 Limited participation 모형이 현실의 유동성효과의 크기를 만들어 낼 수 있다고 말한다. Cole and Ohanian(2002)은 미국에서의 통화충격의 효과가 M1/GDP 비율의 감소와 함께 감소하였다고 주장한다. 이는 금융시장의 구조가 변화함에 따라 유동성효과의 크기도 변화하였음을 의미한다.

나. 명목적 경직성

가격유연성의 가정하에서 통화충격의 단기적 실질효과를 설명하는 불완전정보 모형이나 제한된 참여와 유동성 효과 모형이 많은 관심을 받았지만 대부분의 거시모형은 명목임금과 명목가격의 경직성으로 통화충격의 효과를 설명하고자 한다. 명목통화량의 변화에 명목임금과 명목가격이 즉각적이고 완전하게 조정되지 못하는 데서 통화충격의 단기적인 실질효과가 발생한다는 것이다.

1980년대 모형에서는 가격이 한 기간 동안 고정되어 있다고 가정하

여 통화충격이 실질산출량에 주는 실질효과를 설명하려 하였으나 이는 실제 통화정책이 실질산출량에 미치는 지속적인 (persistent) 효과를 설명할 수는 없었다. Taylor(1979, 1980)의 Staggered-overlapping model과 Multi-period nominal wage contracts model은 실질효과의 지속성을 만들어 낼 수 있었지만 경제주체의 최적화 행동에 기초한 모형이 아니었다. 최근에는 명목가격경직성과 독점적 경쟁시장에 직면한 경제주체의 최적화 결정 문제를 명시적으로 고려한 모형으로 통화정책의 효과를 분석하는 것이 주류를 형성하고 있다.

3. 신케인지언 DSGE모형을 이용한 통화정책효과 분석

가. 모형의 기본 구조

여기서는 가계는 MIU, 기업은 독점적 경쟁 시장과 명목가격의 경직성에 직면한 간단한 신케인지언 거시모형의 예를 통해서 모형의 해를 구하고 가상실험을 행하는 과정을 살펴보자. (자세한 내용은 Walsh의 Chap. 5 참조)

가계의 최적화 문제는 다음과 같이 요약된다.

가계는 소비하고, 노동을 공급하며, 현금과 유가증권을 보유하며 예산제약하에서 무한기에 걸친 기대효용의 할인된 현재가치를 극대화하도록 소비와 노동공급량, 현금과 유가증권보유량을 결정하는 경제주체이다.

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t)$$

확률적 무한기 모형에 대한 일반적인 해는

$$U'(C_t) = \beta E_t \left[U'(C_{t+1}) \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \right]$$

위 식은 보통 동태적 IS곡선 혹은 소비에 관한 오일러방정식이라고 한다. 여기에서는 다음과 같은 구체적인 효용함수를 가정하자.

$$\max E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{\gamma}{1-b} \left(\frac{M_t}{P_t} \right)^{1-b} - \chi \frac{N_t^{1-\eta}}{1+\eta} \right] \quad (70)$$

여기에서 C_t 는 최종소비재로 무수히 많은 독점적 경쟁 하에서 차별화된 제품을 생산하는 연속적인 j 기업의 생산재화의 조합으로 나타낼 수 있다.

$$C_t = \left[\int_0^1 c_{jt}^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \quad \theta > 1. \quad (71)$$

θ 는 수요의 가격탄력성을 결정하는 계수이다.

이에 따라 가계의 최적화 문제는 두 단계로 접근할 수 있다. 첫 번째 단계는 C_t 의 수준에 상관없이 가계는 C_t 의 구입비용을 최소화하는 조합을 구매하는 것이다. 그 다음에는 주어진 최소비용조합의 C_t 하에서 최적의 C_t , N_t , M_t 수준을 결정한다.

첫 번째 문제는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
& \min_{c_{jt}} \int_0^1 p_{jt} c_{jt} dj \\
& s.t. \quad C_t \leq \left[\int_0^1 c_{jt}^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}}
\end{aligned} \tag{72}$$

q_t 를 제약조건에 대한 Lagrangian 승수라고 하면, 재화 j 에 대한 일계조건은 다음과 같다.

$$p_{jt} - q_t \left[\int_0^1 c_{jt}^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj \right]^{\frac{1}{\theta-1}} c_{jt}^{-\frac{1}{\theta}} = 0$$

$$\text{정리하면 } c_{jt} = \left(\frac{p_{jt}}{q_t} \right)^{-\theta} C_t$$

C_t 의 정의에 따라,

$$\begin{aligned}
C_t &= \left[\int_0^1 c_{jt}^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} = \left[\int_0^1 \left(\frac{p_{jt}}{q_t} \right)^{-\theta} C_t^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \\
&= \left(\frac{1}{q_t} \right)^{-\theta} \left[\int_0^1 p_{jt}^{1-\theta} dj \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} C_t
\end{aligned}$$

위를 q_t 에 대해서 풀면,

$$q_t = \left[\int_0^1 p_{jt}^{1-\theta} dj \right]^{\frac{1}{1-\theta}} \equiv P_t \tag{73}$$

q_t 는 소비에 대한 집계물가지수이다.

따라서 재화 j 에 대한 수요는

$$c_{jt} = \left(\frac{p_{jt}}{P_t} \right)^{-\theta} C_t \quad (74)$$

주어진 일반물가수준에 대한 정의에 따라 가계가 직면한 예산제약식은 다음과 같다.

$$C_t + \frac{M_t}{P_t} + \frac{B_t}{P_t} = \left(\frac{W_t}{P_t} \right) N_t + \frac{M_{t-1}}{P_t} + (1+i_{t-1}) \left(\frac{B_{t-1}}{P_t} \right) + \Pi_t \quad (75)$$

여기서 $M_t(B_t)$ 가계의 명목화폐(유가증권) 보유량이고 Π_t 는 기업으로부터 받은 실질이윤이다. 유가증권의 보유는 명목이자 i_t 를 가져온다.

일계조건:

$$\begin{aligned} C_t^{-\sigma} &= \beta E_t \left[C_{t+1}^{-\sigma} (1+i_t) \left(\frac{P_t}{P_{t+1}} \right) \right] \\ &= \beta E_t \left[C_{t+1}^{-\sigma} \left(\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \right) \right] \end{aligned} \quad (76)$$

$$\frac{\gamma(M_t/P_t)^{-b}}{C_t^{-\sigma}} = \frac{i_t}{1+i_t} \quad (77)$$

$$\frac{\chi N_t^\eta}{C_t^{-\sigma}} = \frac{W_t}{P_t} \quad (78)$$

기업의 최적화 문제는 주어진 이용 가능한 생산기술(생산함수), 수요함수, 명목가격경직성, 그리고 노동공급함수하에서 무한기에 걸친 기대이윤의 할인된 현재가치를 극대화하도록 생산량을 결정하는 경제주체이다.

$$\text{생산함수: } c_{jt} = y_{jt} = Z_t N_{jt}, \quad E(Z_t) = 1$$

Z_t 는 생산성충격이고 자본 없이 노동만을 이용해 재화를 생산한다.

$$\text{수요함수: } c_{jt} = \left(\frac{p_{jt}}{P_t} \right)^{-\theta} C_t$$

Calvo(1983) 형태의 명목가격경직성은 매기마다 확률적으로 전체 기업의 $(1-\omega)$ 만이 가격을 조정할 수 있으며 ω 는 가격을 조정할 수 없다. 오직 t 기와 $t+s$ 사이에 가격을 조정할 기회를 갖지 못했을 경우에만 t 기의 가격결정이 일정시점 $t+s$ 의 이윤에 영향을 주며, 그 확률은 ω^s 이다.

기업의 가격결정 문제를 분석하기 전에 비용최소화 문제를 보자.

$$\min_{N_{jt}} \frac{W_t}{P_t} N_{jt} + \psi_t (y_{jt} - Z_t N_{jt})$$

$$\psi_t = \frac{W_t/P_t}{Z_t} : \text{기업의 실질한계비용} \quad (79)$$

대표기업 j 는 아래와 같은 가격결정문제에 직면:

$$\max_{p_{jt}} E_t \sum_{s=0}^{\infty} \omega^s \Delta_{s,t+s} \left[\left(\frac{p_{jt}}{P_{t+s}} \right) y_{jt+s} - \psi_{t+s} y_{jt+s} \right]$$

위에서 할인인자 $\Delta_{s,t+s} = \beta^s (C_{t+s}/C_t)^{-\sigma}$ 이다.

수요함수를 이용하여 위 문제에서 $c_{jt}(y_{jt})$ 를 소거하면

$$\max_{p_{jt}} E_t \sum_{s=0}^{\infty} \omega^s \Delta_{s,t+s} \left[\left(\frac{p_{jt}}{P_{t+s}} \right)^{1-\theta} - \psi_{t+s} \left(\frac{p_{jt}}{P_{t+s}} \right)^{-\theta} \right] C_{t+s}$$

비록 개별기업이 차별화된 재화를 생산하고 있지만 동일한 생산기술과 상수의 동일한 가격탄력성을 가진 수요함수에 직면해 있으므로, 본질적으로 모든 기업이 동일하다고 할수 있다. 단지 확률적으로 현재 가격이 과거에 정한 가격으로 묶여 있을 수 있다.

그러므로 기업 j 의 최적가격 $p_{jt}^* = p_t^*$ 결정을 위한 1계조건은

$$E_t \sum_{s=0}^{\infty} \omega^s \Delta_{s,t+s} \left[(1-\theta) \left(\frac{p_{jt}^*}{P_{t+s}} \right)^{-\theta} \cdot \frac{1}{P_{t+s}} + \theta \psi_{t+s} \left(\frac{p_{jt}^*}{P_{t+s}} \right)^{-\theta} \cdot \frac{1}{p_{jt}^*} \right] C_{t+s} = 0$$

$$E_t \sum_{s=0}^{\infty} \omega^s \Delta_{s,t+s} \left[(1-\theta) \left(\frac{p_{jt}^*}{P_{t+s}} \right) + \theta \psi_{t+s} \right] \left(\frac{1}{p_{jt}^*} \right) \left(\frac{p_{jt}^*}{P_{t+s}} \right)^{-\theta} C_{t+s} = 0 \quad (80)$$

위 식은 $\Delta_{s,t+s} = \beta^s (C_{t+s}/C_t)^{-\sigma}$ 를 이용하여 아래와 같이 정리될 수 있다.

$$\left(\frac{p_t^*}{P_t}\right) = \left(\frac{\theta}{\theta-1}\right) \frac{E_t \sum_{s=0}^{\infty} \omega^s \beta^s C_{t+s}^{1-\sigma} \psi_{t+s} \left(\frac{P_{t+s}}{P_t}\right)^{\theta}}{E_t \sum_{s=0}^{\infty} \omega^s \beta^s C_{t+s}^{1-\sigma} \left(\frac{P_{t+s}}{P_t}\right)^{\theta-1}} \quad (81)$$

위식은 가격이 경직적일 때 ($\omega > 0$), 기업이 최적가격을 설정하기 위해서는 현재의 한계비용뿐 아니라 미래의 기대한계효용을 고려해야 하며, 현재의 주어진 경제 전체의 물가수준에서 어떻게 가격을 설정하는지 보여주고 있다.

만약 모든 기업이 매기간마다 가격을 조정할 수 있다면($\omega = 0$), 위 식은

$$\left(\frac{p_t^*}{P_t}\right) = \left(\frac{\theta}{\theta-1}\right) \psi_t = \mu \cdot \psi_t : \text{Mark-up pricing} \quad (82)$$

한계비용의 일정부분만큼 마크업함을 의미한다.

가격이 완전히 유연한 경우, $\psi_t = \frac{W_t/P_t}{Z_t}$ 이므로 $\frac{W_t}{P_t} = \frac{Z_t}{\mu}$ 임을 알 수 있다. 이때 모든 기업은 같은 가격을 설정하며($p_t^* = P_t$), 균형에서 $\psi_t = 1/\mu$ 가 된다. 또한 소비자의 최적화 조건으로부터 균형에서는 여가와 소비간의 한계대체율이 같아야 하므로,

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{Z_t}{\mu} = \frac{\chi N_t^\eta}{C_t^\sigma} \quad (83)$$

명목가격경직성이 존재할 때 물가지수 P_t 는 t 기에 가격을 설정할 수 있는 $(1-\omega)$ 의 기업들 가격과 그 전기의 가격에 머물러 있는 ω 의 기업들 가격의 평균으로 볼 수 있으며, 따라서

$$P_t^{1-\omega} = (1-\omega)p_t^{*1-\omega} + \omega P_{t-1}^{1-\omega} \quad (84)$$

앞에서 설명한 것처럼 로그함수의 성질을 이용하여 비선형인 모형의 최적화 조건을 정상상태 주위에서 로그선형화할 수 있다.

위식과 명목가격경직성하의 기업의 최적가격설정의 1계 조건을 이용하여 정상상태 주위에서 로그선형근사하면 다음과 같은 신케인지언 필립스 곡선(New Keynesian Phillips Curve: NKPC) 혹은 기대를 반영한 필립스곡선(Forward-looking Phillips Curve)를 유도할 수 있다.

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \tilde{\kappa} \hat{\psi}_t, \quad (85)$$

$$\text{여기서 } \tilde{\kappa} = \frac{(1-\omega)(1-\beta\omega)}{\omega}$$

위의 신케인지언 필립스관계식은 전통적인 필립스관계식과는 달리 인플레이션이 실질한계비용과 미래의 기대인플레이션의 함수임을 보여 준다. 즉, 기업이 가격을 설정할 때 앞으로 가격을 설정할 수 없는 기간이 존재할 수 있기 때문에 이를 고려하여 미래의 인플레이션을 고려해

야 함을 의미한다. 위의 NKPC를 미래에 대해서 풀면,

$$\hat{\pi}_t = \tilde{\kappa} \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s E_t \widehat{\psi}_{t+s} \quad (86)$$

현재의 인플레이션은 현재와 미래의 실질한계비용의 할인된 현재가치임을 알 수 있다. 인플레이션이 모형의 구조적 모수에 어떻게 영향을 받는지 보여준다. 또한 인플레이션은 실제산출량과 잠재산출량과의 산출량갭이나 실제실업률과 자연실업률간의 실업률갭에 직접적으로 의존하지 않고 실질한계비용에 의존함을 알 수 있다.

그렇다면 산출량갭과 실질한계비용 ψ_t 와는 어떻게 관계되어 있는가? 가격경직성이 존재하지 않을 때 기업과 가계의 최적화 조건으로부터

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{Z_t}{\mu} = \frac{\chi N_t^\eta}{C_t^\sigma} \quad (87)$$

실질한계비용을 균제균형 주위에서 로그선형근사하면

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_t &= \hat{w}_t - \hat{p}_t - \hat{z}_t = \hat{w}_t - \hat{p}_t - (\hat{y}_t - \hat{n}_t) \\ &= (\sigma + \eta) \left[\hat{y}_t - \left(\frac{1 + \eta}{\sigma + \eta} \right) \hat{z}_t \right] \\ &= (\sigma + \eta) (\hat{y}_t - \bar{y}) \\ &= \phi \hat{x}_t \end{aligned}$$

여기서 $\bar{y} = \left(\frac{1 + \eta}{\sigma + \eta} \right) \hat{z}_t$ 은 가격이 완전히 유연할 때 균제(steady

state)균형산출량이다.

위식을 NKPC에 대입하면 산출량갭과 인플레이션과의 관계를 나타내는 전통적인 필립스관계식으로 표현할 수 있다.

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \kappa \hat{x}_t,$$

$$\text{여기서 } \kappa = \tilde{\phi} \tilde{\kappa} = \frac{\phi(1-\omega)(1-\beta\omega)}{\omega}$$

나. 모형의 일반균형과 로그선형화

우선 가계의 최적화 조건으로부터 경제전체의 수요측면을 대표하는 동태방정식인 동태적 IS곡선 혹은 기대가 반영된 IS곡선의 로그선형근사식을 유도할 수 있다.

$$C_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[C_{t+1}^{-\sigma} \left(\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \right) \right]$$

위식은 계산하기 힘든 기대가 첨가된 비선형차분방정식이다.

$$y_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[y_{t+1}^{-\sigma} \left(\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \right) \right]$$

$$-\sigma \ln y_t = \ln \beta + \ln E_t \left[y_{t+1}^{-\sigma} \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \right]$$

$$-\sigma \ln y_t = \ln \beta - \sigma E_t \ln y_{t+1} + \ln(1+i_t) - E_t \ln(1+\pi_{t+1})$$

정상상태에서

$$-\sigma \ln \bar{y} = \ln \beta - \sigma E_t \ln \bar{y} + \ln(1 + \bar{i}) - E_t \ln(1 + \bar{\pi})$$

로그선형근사식을 균제균형으로부터의 편차형태로 나타내면,

$$\hat{x}_t = E_t \hat{x}_{t+1} - \sigma^{-1} (\hat{i}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1}) : \text{동태적 IS곡선} \quad (88)$$

$$\hat{x}_t = E_t \hat{x}_{t+1} - \sigma^{-1} (\hat{i}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1}) + u_t$$

ii) 명목가격경직성이 존재하는 시장에서 기업의 최적가격결정식으로부터 경제의 총공급측면을 설명하는 신케인지언 필립스곡선(New Keynesian Phillips Curve)를 유도할 수 있다.

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \kappa \hat{x}_t : \text{NKPC} \quad (89)$$

위의 두식은 인플레이션, 명목이자율, 산출량갭의 세개변수로 구성되어 있다. 만약 통화정책당국이 테일러형태(Taylor-type)의 간단한 준칙을 통해서 명목이자율을 정한다고 가정하면 세개의 방정식을 가진 체계를 구성할 수 있다. (closed system) 여기서 명목통화량은 정책당국이 원하는 명목이자율을 달성하기 위해 내생적으로 결정된다.

$$\hat{i}_t = \delta \hat{\pi}_t + v_t : \text{통화정책 준칙} \quad (90)$$

(88), (89), (90)을 결합하여, $\hat{i}_t$ 를 제거하면 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sigma} \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{E_t x_{t+1}} \\ \widehat{E_t \pi_{t+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sigma} \delta \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x_t} \\ \widehat{\pi_t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} v_t - u_t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (91)$$

$$\Rightarrow A_0 E_t \xi_{t+1} = A_1 \xi_t + B_0 V_{t+1}$$

이는 앞에서 설명한 일반화된 상태공간 모형의 형태이다.

위의 일반화된 선형 합리적 기대모형은 앞에서 설명한 여러 방법을 이용하여 해를 구할 수 있다.

$$\Rightarrow E_t \xi_{t+1} = A_0^{-1} A_1 \xi_t + A_0^{-1} B_0 V_{t+1}$$

$$\begin{bmatrix} \widehat{E_t x_{t+1}} \\ \widehat{E_t \pi_{t+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\kappa}{\delta \beta} & \frac{(\beta \delta - 1)}{\sigma \beta} \\ -\frac{\kappa}{\beta} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x_t} \\ \widehat{\pi_t} \end{bmatrix} + A_0^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} v_t - u_t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (92)$$

인플레이션의 변화에 명목이자율이 그 이상으로 반응하는 것의 중요성을 테일러가 처음으로 강조하였고, $\delta > 1$ 이 되도록 명목이자율을 설정하는 것을 테일러 원칙이라고 한다. Bullard and Mitra(2002)는 $\delta > 1$ 가 성립하는 한 유일한 정상균형이 존재함을 보였다.

테일러 준칙(Taylor 1993)이란 중앙은행이 인플레이션뿐 만 아니라 산출량갭의 변화에도 반응하여 명목이자율을 설정하는 형태의 준칙을

의미한다.

$$\hat{i}_t = \delta_\pi \hat{\pi}_t + \delta_x \hat{x}_t + v_t \quad (93)$$

다. BK 방법을 이용한 모형의 해

$$E_t \xi_{t+1} = A_0^{-1} A_1 \xi_t + A_0^{-1} B_0 V_{t+1} \quad (94)$$

$$E_t \xi_{t+1} = A \xi_t + B V_{t+1}$$

$$\text{여기에서 } A = A_0^{-1} A_1, \quad B = A_0^{-1} B_0$$

앞에서 설명한 것처럼 Blanchard-Kahn의 방법론을 이용하여 위 모형의 수치해석할적 해를 어떻게 구하는지 알아보자.

(i) 먼저 ξ_t 의 변수를 그 성질에 따라 분리한다.

$$\xi_t = \begin{bmatrix} d_t \\ f_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{predetermined variables} \\ \text{forward-looking variables : control variables} \end{bmatrix}$$

(ii) 행렬 A에 대한 Jordan Decomposition:

$$\begin{bmatrix} d_{t+1} \\ E_t f_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} d_t \\ f_t \end{bmatrix} + B V_{t+1}$$

$$A = P \Lambda P^{-1}$$

P는 특성벡터 행렬이고, Λ 는 특성근들로 이루어진 대각행렬이다.

$$\begin{bmatrix} d_{t+1} \\ E_t f_{t+1} \end{bmatrix} = P \Lambda P^{-1} \begin{bmatrix} d_t \\ f_t \end{bmatrix} + B V_{t+1}$$

양변에 P^{-1} 를 곱하면

$$P^{-1} \begin{bmatrix} d_{t+1} \\ E_t f_{t+1} \end{bmatrix} = \Lambda P^{-1} \begin{bmatrix} d_t \\ f_t \end{bmatrix} + P^{-1} B V_{t+1}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{t+1} \\ E_t f_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_t \\ f_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} V_{t+1} \quad (95)$$

여기서 Λ_1 은 안정적인 특성근, Λ_2 는 불안정한 특성근을 나타낸다. 위식은 아래와 같이 표현될 수 있다.

(iii) Decoupled Equations: 방정식을 안정적인 해와 불안정한 해를 같은 두개의 체계로 분리하여 각각을 따로 풀 수 있게 만들 수 있다.

$$\begin{bmatrix} p_{11}^* d_{t+1} + p_{12}^* E_t f_{t+1} \\ p_{21}^* d_{t+1} + p_{22}^* E_t f_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{d_{t+1}} \\ \widetilde{E_t f_{t+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{d_t} \\ \widetilde{f_t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} V_{t+1}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \widetilde{d_{t+1}} \\ \widetilde{E_t f_{t+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{d_t} \\ \widetilde{f_t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} V_{t+1}$$

$$\widetilde{d_{t+1}} = \Lambda_1 \widetilde{d_t} + R_1 V_{t+1} \quad (96)$$

$$E_t \widetilde{f_{t+1}} = A_2 \widetilde{f_t} + R_2 V_{t+1} \quad (97)$$

(iv) 먼저 불안정한 방정식체계인 (97)를 풀어 $\widetilde{f_t}$ 를 구하고 이를 토대로 안정적인 방정식체계인 (96)를 풀어 $\widetilde{d_t}$ 를 구하여 이를 원문제에 대입하여 d_t, f_t 를 복구한다.

(97)식을 미래의 t+j기에 대해서 풀면

$$E_t \widetilde{f_{t+j}} = A_2^j \widetilde{f_t}$$

$|A_1| > 1$ 이므로 유일한 안정적인 해는 $\widetilde{f_t} = 0 \quad \forall t$. 즉,

$$\begin{aligned} \widetilde{f_t} &= p_{21}^* d_t + p_{22}^* f_t = 0 \quad \forall t \\ \Rightarrow f_t &= -p_{22}^{*-1} p_{21}^* d_t \end{aligned} \quad (98)$$

식 (98)에서 보는 것처럼 해는 기대가 포함된 Forward-looking 제어 변수가 선결변수의 함수로 표현된다. 다음은 안정적인 체계인 식 (96)를 미래의 t+j기에 대해서 풀면

$$E_t \widetilde{d_{t+j}} = A_1^j \widetilde{d_t}$$

$|A_1| < 1$ 이므로 안정적인 해가 존재하며

$$\widetilde{d_t} = p_{11}^* d_t + p_{12}^* f_t$$

$$f_t = -p_{22}^{*-1} p_{21}^* d_t \quad \text{이므로} \quad \tilde{d}_t = (p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*) d_t$$

$$\text{따라서} \quad \widetilde{d_{t+1}} = A_1 \tilde{d}_t + R_1 V_{t+1}$$

$$(p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*) d_{t+1} = A_1 (p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*) d_t + R_1 V_{t+1} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} d_{t+1} &= (p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*)^{-1} A_1 (p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*) d_t \\ &\quad + (p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*)^{-1} R_1 V_{t+1} \end{aligned}$$

식 (99)에서 보는 것처럼 미래의 선결변수의 해는 현재의 선결변수의 함수로 표현됨을 알 수 있다.

(v) 전체 모형의 해:

$$f_t = -p_{22}^{*-1} p_{21}^* d_t \quad (98)$$

$$\begin{aligned} d_{t+1} &= (p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*)^{-1} A_1 (p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*) d_t \\ &\quad + (p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*)^{-1} R_1 V_{t+1} \end{aligned} \quad (99)$$

모든 변수가 선결변수들의 함수이며 recursive한 구조를 가지고 있다.

라. 모형의 확장 및 해를 이용한 시뮬레이션

기본모형에서 정책충격을 AR(1)을 가정하여 모형을 분석하고자 한다면

기본모형:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sigma} \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{E_t x_{t+1}} \\ \widehat{E_t \pi_{t+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sigma} \delta \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x_t} \\ \widehat{\pi_t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} v_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

통화정책충격(policy shock process):

$$v_{t+1} = \rho_r v_t + e_t$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sigma} \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{v_{t+1}} \\ \widehat{E_t x_{t+1}} \\ \widehat{E_t \pi_{t+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_r & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sigma} & 1 & \delta \frac{1}{\sigma} \\ 0 & -\kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{v_t} \\ \widehat{x_t} \\ \widehat{\pi_t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_t$$

$$\Rightarrow A_0 E_t \xi_{t+1} = A_1 \xi_t + B_0 V_{t+1}$$

위 모형의 해:

$$\begin{aligned} f_t &= -p_{22}^{*-1} p_{21}^* d_t \\ d_{t+1} &= (p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*)^{-1} A_1 (p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*) d_t \\ &\quad + (p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*)^{-1} R_1 V_{t+1} \end{aligned}$$

해의 축차적 구조를 이용해 쉽게 시뮬레이션을 실행할 수 있다.

그렇다면 시뮬레이션을 통해서 우리가 보고자 하는 것은 무엇인가?

첫째, 가상의 자료를 가지고 현실에서 정형화된 사실들과 비교할 수 있다. 즉, 가상의 자료를 통해 본 분산, 공분산, 상관관계, 자기상관 등을 현실의 자료에서 나온 것과 비교 할 수 있는 것이다. 둘째는 경제에

여러 가지 다른 성격의 외생적인 충격에 대한 반응함수(IRF)를 볼 수 있고, 셋째는 주요 변수의 예측오차 분산 분석을 통해서 변동의 주요 요인(FEVD)을 분석해 볼 수 있다.

(1) 순환적인 시뮬레이션 기법

순환적인 시뮬레이션이 행해지는 주요 과정을 살펴보면,

- (i) 우선 정상상태 값인 $d_0 = 0$ 에서 출발한다.
- (ii) 표준정규분포로부터 $\{V_t\}$ 를 sampling 한다.
- (iii) 다음의 확률적 과정을 이용하여 순환적으로 $\{V_t\}$ 로터 $\{d_t\}$ 를 만들어 낸다.

$$d_{t+1} = (p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*)^{-1} \Lambda_1 (p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*) d_t \\ + (p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*)^{-1} R_1 V_{t+1}$$

- (iv) (iii)단계에서 생성된 $\{d_t\}$ 를 이용하여 $\{f_t\}$ 를 다음과 같이 만들어 낸다.

$$f_t = -p_{22}^{*-1} p_{21}^* d_t$$

- (v) 만들어진 자료에서 처음의 몇 개의 자료를 제외하고서 보고자 하는 통계량을 생성된 자료를 이용하여 계산한다.

(2) 충격반응함수를 이용한 분석

만약 v_t 원소 중 하나에 단위 표준편차의 충격이 주어졌을 때 변수 d_t 와 f_t 에는 어떤 영향이 있는지 보고자 한다면 충격반응함수를 이용해 이를 분석할 수 있다. 기본적인 과정을 요약해 보면,

- (i) 우선 정상상태 값인 $d_0 = 0$ 에서 출발한다.
- (ii) 관심을 가지고 있는 충격을 다음과 같이 정의한다.

$$v_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

- (iii) 다음의 확률적 과정을 이용하여 순환적으로 $\{V_t\}$ 로터 $\{d_t\}$ 를 만들어 낸다.

$$d_{t+1} = (p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*)^{-1} A_1 (p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*) d_t \\ + (p_{11}^* - p_{12}^* p_{22}^{*-1} p_{21}^*)^{-1} R_1 V_{t+1}$$

- (iv) (iii)단계에서 생성된 $\{d_t\}$ 를 이용하여 $\{f_t\}$ 를 다음과 같이 만들어 낸다.

$$f_t = -p_{22}^{*-1} p_{21}^* d_t$$

위에서 만들어진 d_t 와 f_t 를 살펴봄으로서 관심있는 변수가 충격에 어떻게 반응하는지 알 수 있을 것이다.

(3) 예측오차 분산분해를 이용한 분석

측정시점 t 기에 다음 h 기간에 대한 산출량갭을 예측한다고 가정하자. 예상치 못한 충격 때문에 예측오차가 발생할 것이다. 그렇다면 각각의 다른 예측기간동안에 발생한 예측오차의 어느 정도가 모형의 특정한 충격 때문인지 알고 싶다면 어떻게 해야 하나?

먼저 $V_t = [v_{1t} \ v_{2t}]'$ 의 각 shock에 대한 산출량갭의 충격반응함수 (IRF)을 정의해야 한다. 이를 다음과 같이 정의하면

제 1기부터 8기까지의 충격 v_1 에 대한 산출량갭의 반응:

$$(\psi_1^1 \ \psi_2^1 \ \psi_3^1 \ \dots \ \psi_8^1)$$

제 1기부터 8기까지의 충격 v_2 에 대한 산출량갭의 반응:

$$(\psi_1^2 \ \psi_2^2 \ \psi_3^2 \ \dots \ \psi_8^2)$$

위의 결과를 가지고 FEVD를 계산해보면,

(i) 예측기간 1기의 예측오차분산분해

$$v_1 \text{의 예측오차 분산 기여도: } \frac{(\psi_1^1)^2 \sigma_{v1}^2}{(\psi_1^1)^2 \sigma_{v1}^2 + (\psi_1^2)^2 \sigma_{v2}^2}$$

$$v_2 \text{의 예측오차 분산 기여도: } \frac{(\psi_1^2)^2 \sigma_{v2}^2}{(\psi_1^1)^2 \sigma_{v1}^2 + (\psi_1^2)^2 \sigma_{v2}^2}$$

(ii) 예측기간 2기의 예측오차분산분해

v_1 의 예측오차 분산 기여도:

$$\frac{(\Psi_1^1)^2 \sigma_{v1}^2 + (\Psi_2^1)^2 \sigma_{v1}^2}{(\Psi_1^1)^2 \sigma_{v1}^2 + (\Psi_2^1)^2 \sigma_{v1}^2 + (\Psi_1^2)^2 \sigma_{v2}^2 + (\Psi_2^2)^2 \sigma_{v2}^2}$$

v_2 의 예측오차 분산 기여도:

$$\frac{(\Psi_1^2)^2 \sigma_{v2}^2 + (\Psi_2^2)^2 \sigma_{v2}^2}{(\Psi_1^1)^2 \sigma_{v1}^2 + (\Psi_2^1)^2 \sigma_{v1}^2 + (\Psi_1^2)^2 \sigma_{v2}^2 + (\Psi_2^2)^2 \sigma_{v2}^2}$$

iii) 예측기간 h 기의 예측오차분산분해

$$v_1 \text{의 예측오차 분산 기여도 : } \frac{\sum_{i=1}^h (\Psi_i^1)^2 \sigma_{v1}^2}{\sum_{i=1}^h (\Psi_i^1)^2 \sigma_{v1}^2 + \sum_{i=1}^h (\Psi_i^2)^2 \sigma_{v2}^2}$$

$$v_2 \text{의 예측오차 분산 기여도 : } \frac{\sum_{i=1}^h (\Psi_i^2)^2 \sigma_{v2}^2}{\sum_{i=1}^h (\Psi_i^1)^2 \sigma_{v1}^2 + \sum_{i=1}^h (\Psi_i^2)^2 \sigma_{v2}^2}$$

(4) 모형의 확장

모형에 영향을 주는 외생적 충격을 추가적으로 고려할 수 있다.

$$\hat{x}_t = E_t \hat{x}_{t+1} - \sigma^{-1}(\hat{i}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1}) + u_t \quad \text{동태적 IS 곡선}$$

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \kappa \hat{x}_t + w_t \quad \text{NKPC}$$

$$\hat{i}_t = \delta \hat{\pi}_t + v_t \quad \text{통화정책준칙}$$

각 충격은 다음과 같은 AR(1)을 따른다고 가정하자.

$$u_t = \rho_x u_{t-1} + \epsilon_t^u$$

$$w_t = \rho_\pi w_{t-1} + \epsilon_t^w$$

$$v_t = \rho_r v_{t-1} + \epsilon_t^v$$

좀 더 복잡한 모형의 해를 구하기 위해서는 먼저 Blanchard-Kahn의 방법을 적용하기 위해서는 처음의 상태공간모형에서 A_0 행렬의 역함수가 존재해야 함을 알 수 있다.

$$\Rightarrow A_0 E_t \xi_{t+1} = A_1 \xi_t + B_0 V_{t+1}$$

$$E_t \xi_{t+1} = A_0^{-1} A_1 \xi_t + A_0^{-1} B_0 V_{t+1}$$

$$E_t \xi_{t+1} = A \xi_t + B V_{t+1} : \text{다른 상태공간의 표현}$$

$$\text{여기에서 } A = A_0^{-1} A_1, B = A_0^{-1} B_0.$$

만약 A_0 에 대한 역행렬이 존재하지 않는다면, Klein의 방법을 쓸 수 있을 것이다. 제 2장에서 설명한 것처럼 Klein의 방법의 상대적인 잇점은 A_0 이 특이행렬이어도 해를 구할 수 있다는 것이다. 이는 소위 complex generalized Schur decomposition를 적용하기 때문에 가능하다. QZ 분해(Shur Decomposition or Triangulation)는 두개의 정방행렬 A_0 와 A_1 에 대해서 다음을 만족하는 Q, Λ , Ω , Z이 존재한다는 것이다.

$$Q' \Lambda Z' = A_0$$

$$Q' \Omega Z' = A_1$$

여기에서 A, Ω 는 상위삼각행렬(upper triangular)이다.

위의 Shur 분해를 이용하면

$$A_0 E_t \xi_{t+1} = A_1 \xi_t + B_0 V_{t+1}$$

$$\Rightarrow Q' \Lambda Z' E_t \xi_{t+1} = Q' \Omega Z' \xi_t + B_0 V_{t+1}$$

$$\Lambda Z' E_t \xi_{t+1} = \Omega Z' \xi_t + Q'^{-1} B_0 V_{t+1}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{d_{t+1}} \\ E_t \widetilde{f_{t+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ 0 & \Omega_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{d_t} \\ \widetilde{f_t} \end{bmatrix} + Q'^{-1} B_0 V_{t+1}$$

$$A_{11} \widetilde{d_{t+1}} + A_{12} E_t \widetilde{f_{t+1}} = \Omega_{11} \widetilde{d_t} + \Omega_{12} \widetilde{f_t} + R_1 V_{t+1} \quad (100)$$

$$A_{22} E_t \widetilde{f_{t+1}} = \Omega_{22} \widetilde{f_t} + R_2 V_{t+1} \quad (101)$$

앞에서 본 기본모형의 해처럼 순환적인 구조로 변환되어 불안정한 해를 가지는 식 (101)를 먼저 풀고, 이를 식 (100)에 대입하여 안정적인 해를 구할 수 있다.

V

결론 및 시사점

V. 결론 및 시사점

경제주체의 최적화 행위, 합리적인 기대, 시장청산 등의 미시적 기초에 기반한 동태적인 일반균형모형에 다양한 외생적인 경제충격을 고려한 DSGE모형은 이제 더 이상 실증분석모형에 이론적 기초를 제공하는 데 머무르지 않고 다양한 정책분석과 예측 등의 정량적 분석을 위한 중요한 도구로 자리잡아 가고 있다. 이렇게 DSGE모형이 거시경제실증분석의 핵심방법론으로 등장할 수 있었던 중요한 요인은 크게 세가지로 요약할 수 있을 것이다.

첫째는 동태적 일반균형모형이 가지는 풍부한 구조에 있다. 기존의 축약형 모형이나 연립방정식 구조모형은 이미 현대 거시경제학의 기초가 된 경제주체의 최적화 행태, 미래에 대한 합리적 기대, 현실에서 존재하는 명목 혹은 실질적 경직성 등의 미시적 기초에 기반하지 않는다. 따라서 주어진 실증결과를 이론에 부합되게 설명하고 해석하는 데 한계가 있을 수 밖에 없다. 이에 반해 기본적인 DSGE 모형은 시장의 불완전성이 존재하지 않은 완전시장, 신축적인 가격, 시장청산 등의 가정에서 출발한다. 그리고 이러한 모형경제에 수요, 생산성, 가동률, 통화정책, 재정정책 등의 외생적 충격이 발생했을 때 주요 거시경제변수가 어떻게 반응하는지 분석하거나 다양한 시나리오에 따라 시뮬레이션을 실시하여 경제예측에 활용할 수 있다. 만약 기본모형이 장기적인 성장이나 단기적 경기변동의 주요 사실들을 잘 설명하지 못한다면 명목임금이나 가격의 경직성, 투자조정비용 등의 불완전성을 도입한 모형으로 혹은, 폐쇄경제모형에서 소규모 개방경제모형으로 유연하게 확장할 수 있는 장점이 있다.

둘째는 복잡한 비선형 기대차분방정식체계로 이루어진 DSGE 모형의 본래의 해(解)를 분석하고자 하는 모형에 적합하고 쉽게 근사화하여

해(解)를 구할 수 있는 다양한 방법이 개발되었다는 것이다. 즉, 주어진 DSGE모형을 실증적으로 분석 가능한 방정식체계로 전환시키는 것이 필요하며, 전환된 모형은 다양한 방법을 이용해 모형의 모수를 추정하고, 추정된 모형이 현실의 데이터를 잘 설명하는지 비교하고, 미래를 예측하고, 정책효과를 분석하는 데 사용할 수 있을 것이다. 모형의 해를 구하는 방법은 크게 선형 모형을 이용하여 근사키는 방법과 비선형 모형을 이용하여 근사시키는 방법으로 나눌 수 있다. 근본적인 방법론적인 차이점은 비선형방법으로 모형을 근사시키기 위해서는 모형의 관련 변수들을 시뮬레이션 기법을 이용해 생성해내야 한다는 것이다. 이는 선형근사에서처럼 변수들의 관계에 대한 명시적인 함수 형태가 존재하지 않기 때문이다. 본고에서는 선형근사를 이용해 해를 구하는 방법을 중심으로 DSGE 모형의 기본모형을 지금까지 살펴보았다.

마지막으로 단순한 캘리브레이션에서 출발한 DSGE 모형의 실증 분석 방법은 GMM, SMM과 같은 모수추정 방법론이 도입되거나 모형의 상태공간형태에 칼만필터를 이용한 최우도추정법을 적용하기도 하며, 최근에는 베이지언 기법을 이용한 추정 등도 보편화 되면서 점차 모수추정과 모형평가 방법들이 정치화되고 있다는 점이다. 이에따라 최신의 DSGE 모형은 모형의 설명력이나 예측력이 VAR 모형과 비교해도 결코 뒤떨어지지 않은 것으로 나타나고 있다.³⁾

이렇게 DSGE 모형은 구조적 풍부함, 다양하고 독창적인 모형의 해(解)를 구하는 방법, 정치화된 추정방법과 효율적이고 강력한 시뮬레이션 기법 등이 결합되어 중요한 실증분석의 방법론으로 자리 잡게 되었다.

지금까지 DGSE모형은 주로 통화정책의 효과분석과 경제전망에 활

3) Egde, Kiley, and Laforge(2008)은 미 연준(FRB)의 전망모형간의 예측력을 비교한 결과 VAR, BVAR(Bayesian VAR), FRB-US 등의 기존 모형에 비해 DSGE모형의 예측력이 결코 뒤지지 않음을 보여 주고 있다.

용되어 왔다. 세계 주요국의 중앙은행들은 다양한 DSGE 모형을 개발하여 통화정책을 결정하기 위한 주요한 수단으로 활용하고 있으며, 한국은행도 지난 2007년 한국은행의 DSGE(BOKDSGE) 모형을 개발하였고, 2009년 들어서는 DSGE모형에서 도출된 구조식과 시계열 방법을 이용한 행태식을 결합하여 경제전망에 활용할 수 있는 일종의 혼합형 DSGE모형인 BOKDPM(BOK Dynamic Projection Model)를 내놓았다. 그러나 경기변동을 일으키는 다른 하나의 중요한 정책충격이 재정정책이다. 따라서 여러 가지 충격과 그 전과경로를 DSGE 모형에 도입하여 정책효과분석에 활용하고, 재정정책의 효과를 분석하고 예측하는 모형을 개발하는 데 노력을 경주해야 한다. 이를 위해서는 우선 우리 처는 경제의 주요 거시경제변수를 잘 설명할 수 있는 기본적인 DSGE 모형을 개발하려고 한다. 다음으로는 기본모형을 확장하여 우리나라의 조세구조와 정부지출구조를 잘 반영하는 모형으로 발전시켜 일반균형의 풍부한 틀 안에서 재정정책 효과와 전과경로를 분석하는 데 활용할 수 있는 방향으로 나아갈 예정이다.

참고문헌

강희돈, 2009. 1, “한국은행의 경제전망용 DSGE모형(BOKDPM) 개발 현황”, 조사통계월보, 한국은행 조사국.

강희돈·박양수, 2007. 9, “한국은행 동태적 최적화모형(BOKDSGE)의 개요”, 조사통계월보, 한국은행 조사국.

Baumal, W., 1952, The Transactions Demand for Cash, *Quarterly Journal of Economics* 67, 545-556.

Blanchard, O. J., and C. M. Kahn, 1980, The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations, *Econometrica* 48, 1305-1311.

Blanchard, O. J., and N. Kiyotaki, 1987, Monopolistic Competition and the Effects of Aggregate Demand, *American Economic Review* 77, 647-666.

Calvo, G. A., 1983, Staggered Prices in a Utility-Maximizing Framework, *Journal of Monetary Economics* 12, 983-998.

Canova, F., 2007, *Methods for Applied Macroeconomic Research*, Princeton: Princeton University Press.

Christiano, L. J., 2002, Solving Dynamic Equilibrium Models by a Method of Undetermined Coefficients, *Computational Economics* 20, 21-55.

Christiano, L. J., and M. Eichenbaum, 1992, Liquidity Effects and the Monetary Transmission Mechanism, *American Economic Review* 82, 346-353.

Christiano, L. J., M. Eichenbaum, and C. Evans, 1996, Sticky Price and Limited Participation Models of Money: A Comparison,

Northwestern University, Evanston, IL.

Christiano, L. J., M. Eichenbaum, and C. Evans, 2005, Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy, *Journal of Political Economy* 113, 1-45.

Clower, R. W., 1967, A Reconsideration of the Microfoundations of Monetary Theory, *Western Economic Journal* 6, 1-9.

Cooley, T. F., 1995, *Frontiers of Business Cycle Research*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Dejong, David N. and Chetan Dave, 2007, *Structural Macroeconometrics*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Dotsey, M., and Peter Ireland, 1995, Liquidity Effects and Transaction Technologies, *Journal of Money, Credit and Banking* 27, 1441-1457.

Edge, R., M. Kiley, and J. Laforge, 2008, A Comparison of Forecast Performance Between Federal Reserve Staff Forecasts, Simple Reduced-Form Models, and a DSGE Model, *Manuscript*, Board of Governors of the Federal Reserve System.

Fischer, S., 1979, Anticipations and the Nonneutrality of Money, *Journal of Political Economy* 87, 225-252.

Fuerst, T. S., 1992, Liquidity, Loanable Funds, and Real Activity, *Journal of Monetary Economics* 29, 3-24.

Goldfeld, S. M., and D. E. Sichel, 1990, The Demand for Money, In B. Friedman and F. Hahn Eds., *The Handbook of Monetary Economics*, vol. 1, 299-356, New York: North-Holland.

Ireland, P., 2004, Technology Shocks in the New Keynesian Model, *Review of Economics and Statistics* 86, 923-936.

Hansen, L. P., and T. J. Sargent, 1980, Formulating and Estimating Dynamic Linear Expectations Models, *Journal of Economic Dynamics and Control* 2, 7-46.

Hansen, L. P., and K. J. Singleton, 1982, Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models, *Econometrica* 50, 269-286.

Judd, K.L., 1998, *Numerical Methods in Economics*, MIT Press, Cambridge, MA.

King, R. G., and M. W. Watson, 1996, Money, Prices, Interest Rates and the Business Cycle, *Review of Economics and Statistics* 78, 35-53.

King, R. G., and M. W. Watson, 2002, System Reduction and Solution Algorithms for Solving Linear Difference Systems under Rational Expectations, *Computational Economics* 20, 57-86.

Kiyotaki, N., and R. Wright, 1989, On Money as a Medium of Exchange, *Journal of Political Economy* 97, 927-954.

Klein, P., 2000, Using the Generalized Schur Form to Solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model, *Journal of Economic Dynamics and Control* 24, 405-423.

Kydland, F. E. and E. C. Prescott, 1982, Time to Build and Aggregate Fluctuations, *Econometrica* 50, 345-370.

Lucas, R. E., 1972, Expectations and the Neutrality of Money, *Journal of Economic Theory* 4, 103-124.

Lucas, R. E., 1976, Econometric Policy Evaluation: A Critique, *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 1, 19-46.

Lucas, R. E., 1990, Liquidity and Interest Rates, *Journal of*

Economic Theory 50, 237-264.

Sidrauski, M., 1967, Rational Choices and Patterns of Growth in a Monetary Economy, *American Economic Review* 57, 534-544.

Sims, C. A., 1972, Money, Income, and Causality, *American Economic Review* 62, 540-552.

Sims, C. A., 1980, Macroeconomics and Reality, *Econometrica* 48, 1-48.

Sims, C. A., 2002, Solving Linear Rational Expectations Models, *Computational Economics* 20, 1-20.

Solow, R. M., 1965, A Contribution to the Theory of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics* 70, 65-94.

Taylor, J. B., 1979, Staggered Wage Setting in a Macro Model, *American Economic Review* 69, 108-114.

Taylor, J. B., 1980, Aggregate Dynamics and Staggered Contracts, *Journal of Political Economy* 88, 1-24.

Taylor, J. B., 1993, Discretion versus Policy Rules in Practice, *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 39, 195-214.

Tobin, J., 1956, The Interest Elasticity of the Transactions Demand for Cash, *Review of Economics and Statistics* 38, 241-247.

Tobin, J., 1965, Money and Economic Growth, *Econometrica* 33, 671-684.

Uhlig, H., 1999, A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily, in Ramon Mariomon and Andrew Scott Eds., *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, Oxford University Press, New York, 30-61.

Walsh, Carl E., 2003, *Monetary Theory and Policy*, MIT Press,

Cambridge, MA.

Woodford, M., 2003, *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Zellner, A., 1971, *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, New York: Wiley.

DSGE모형의 기초 방법론 연구

발 간 일 2009년 2월
편 집 경제분석실 거시경제분석팀
발 행 인 신 해 룡
발 행 처 **국회예산정책처**
서울특별시 영등포구 의사당로1
Tel 02·2070·3114

인 쇄 처 (TEL 02-313-7593)

1. 이 보고서의 무단 복제 및 전제는 삼가주시기 바랍니다.
 2. 보고서의 내용에 관한 문의는 국회예산정책처 거시경제분석팀
(Tel 02·788·3775)으로 문의해주시기 바랍니다.
-

ISBN 978-89-6073-178-3 93350

© 국회예산정책처, 2009