Aus der Geschichte der Zahlentheorie

Wolfgang Schwarz

Ergänzte Ausarbeitung einer
einstündigen Vorlesung
im Winter–Semester 2000/2001

Frankfurt am Main

Vorwort

Diese Vorlesung stellt einen Versuch dar, gleichzeitig mit der Darstellung des Lebenslaufs wichtiger Vertreter der Zahlentheorie[1] die Entwicklung zahlentheoretischer Probleme und Ergebnisse, insbesondere aus dem Bereich der Elementaren und Analytischen Zahlentheorie, zu skizzieren. Die Vorlesung ist damit ein Mittelding zwischen einer Geschichte der Zahlentheorie und einem zahlentheoretischen Ergebnisbericht. **Ein** Ziel geschichtlicher Untersuchungen, **Orientierung** zu vermitteln, könnte damit erreichbar sein.[2,3]

[1]Lebensdaten und Lebenslauf sind oft dem „Lexikon bedeutender Mathematiker" ([32]) entnommen, ohne daß besonders darauf hingewiesen wird.

[2]Für Hinweise auf Fehler, inkorrekte Darstellung oder Auslassungen wäre ich sehr dankbar; Zuschriften möglichst per e–mail an die Adresse `schwarz@math.uni-frankfurt.de`

[3]Aus Zeitgründen konnten einige wichtige Teilgebiete der Zahlentheorie, wie die Geometrie der Zahlen und die Theorie der Diophantischen Approximationen und transzendenten Zahlen leider nicht mehr behandelt worden. Einige Hinweise zur Theorie der transzendenten Zahlen findet man in W. Schwarz [62].

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[1] Ayoub, R., *Euler and the zeta function*, Amer. Math. Monthly **81**, 1067 – 1086, 1974

[2] Baker, A., *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press 1975

[3] Ball, W. W. Rouse, *A Short Account of the History of Mathematics*, 4^{th} edition, 1908

[4] Barner, K., *Paul Wolfskehl und der Wolfskehl–Preis*, DMV–Mitteilungen 3/1997, p. 4–11 (1997)

[5] Barner, K., *Wie alt wurde Pierre de Fermat?*, Preprint 1999, Kassel

[6] Barner, K., *How old did Fermat become?*, Preprint 2000, Kassel

[7] Barner, K., *Diophant und Fermat*, Vortrag in Göttingen, 26. 6. 2000

[8] Barner, K., *Das Leben Fermats*, DMV–Mitteilungen 3/2001, p.12–26, (2001)

[9] Begehr, H. G. W., Koch, H. & al., *Mathematic in Berlin*, Birkhäuser–Verlag 1998

[10] Bloch, S., *The Proof of the Mordell Conjecture*, The Mathematical Intelligencer **6**, 41–47 (1984)

[11] Bölling, R., *Karl Weierstraß — zum 100. Todestag*, DMV — Mitteilungen 1/1997, p.5–10 (1997)

[12] Browder, F., editor, *Mathematical developments arising from Hilbert Problems*, Proc. Symp. Pure Math. AMS, Vol. XXVIII, 1976

[13] Bundschuh, Peter, *Einführung in die Zahlentheorie*, 2. Aufl. Springer, 1992

[14] Cajori, F., *A History of Mathematics*, 1893, Chelsea Reprint 1980, 1985, 1991

[15] Davenport, H., *Multiplicative Number Theory*, Markham Publ. Comp. Chicago 1967

[16] Diamond, H., *Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers*, Bull. Am. Math. Soc. **7**, 553–589 (1982)

[17] Dieudonné, J., *Geschichte der Mathematik (1700 – 1900)*, Berlin 1985

[18] Edwards, H. M., *Fermat's Last Theorem, a Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*, Springer–Verlag 1977

[19] Encyclopedic Dictionary of Mathematics, edited by Kiyosi Itô, 2^{nd} edition, MIT Press Cambridge, Mass. 1987

[20] GUY, RICHARD K., *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer–Verlag 1981

[21] HALBERSTAM, H. & RICHERT, H.–E., *Sieve Methods*, London – New York – San Francisco 1974

[22] HALBERSTAM, H. & ROTH, K. F., *Sequences*, Oxford 1966

[23] HARDY, G. H., *Divergent Series*, Oxford 1949, 1956, 1963

[24] HARDY, G. H. & HEILBRONN, H., *Edmund Landau*, J. London Math. Soc. 13, 302–310, 1938

[25] HLAWKA, E., *Theorie der Gleichverteilung*, Bibl. Institut 1979

[26] HUA, L.K., *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, I. 2 D. Analytische Zahlentheorie, Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, 1959

[27] INGHAM, A. E., *The distribution of prime numbers*, Cambridge Univ. Press 1932

[28] IVIĆ, A., *The Riemann Zeta–Function*, John Wiley & Sons, 1985

[29] KAUFMANN – BÜHLER, W., *Gauss, A Biographical Study*, Springer–Verlag 1981

[30] KÖRNER, O., *Algebra*, Akad. Verl.ges. Frankfurt a. M. 1974

[31] KUIPERS, L. & NIEDERREITER, H., *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley New York 1974

[32] GOTTWALD, S., ILGAUDS, H.–J., SCHLOTE, K.–H., Herausgeber, *Lexikon bedeutender Mathematiker*, Bibl. Inst. Leipzig 1990

[33] KLEIN, FELIX, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Berlin, Heidelberg, New York, Reprint 1979

[34] KLINGEN, H., *Das Werk C. L. Siegels in der Funktionentheorie*, Jahresb. DMV **85**, 158–173 (1983)

[35] KOENIGSBERGER, L., *Carl Gustav Jacob Jacobi*, Rede am 9. August 1904 in Heidelberg, Leipzig 1904

[36] KOLMOGOROV, A. N. & YUSHKEVICH, A. P., Editors, *Mathematics of the* 19^{th} *century*, Birkhäuser 1992

[37] LANDAU, EDMUND, *Collected Works*, 10 vols. Thales Verlag um 1980

[38] LAUGWITZ, D., *Bernhard Riemann 1826–1866, Turning Points in the Conception of Mathematics*, Birkhäuser 1999

[39] MIRSKY, L., *In Memory of Edmund Landau, Glimpses from the Panorama of Number Theory and Analysis*, Math. Scientist 2, 1–26, 1977

[40] MONTGOMERY, H. L., *Topics in Multiplicative Number Theory*, Springer–Verlag 1971

[41] MOTOHASHI, Y., *Lectures on Sieve Methods and Prime Number Theory*, Bombay 1983

[42] NARKIEWICZ, W., *The Development of Prime Number Theory*, Springer–Verlag, 2000

[43] NEUGEBAUER, O., *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, Springer–Verlag 1934

[44] NEUKIRCH, J., *Algebraische Zahlentheorie*, in Ein Jahrhundert Mathematik, 1890–1990, Festschrift zum Jubiläum der DMV, Vieweg 1990, p. 587–628

[45] PATTERSON, S. J., *Erich Hecke und die Rolle der L–Reihen in der Zahlentheorie*, in: Ein Jahrhundert Mathematik, Festschrift der DMV, 1990, p. 629–655

[46] VON RENTELN, M., *Geschichte der Analysis im 18. Jahrhundert*, Vorlesungsskript Karlsruhe 1991

[47] VON RENTELN, M., *Aspekte zur Geschichte der Analysis im 20. Jahrhundert*, Vorlesungsskript Karlsruhe 1987

[48] RIBENBOIM, P., *13 Lectures on Fermat's Last Theorem*, Springer–Verlag 1979

[49] RIBENBOIM, P., *The Book of Prime Number Records*, Springer–Verlag 1988, 2^{nd} ed. 1989

[50] RIBENBOIM, P., *The New Book of Prime Number Records*, Springer–Verlag 1996

[51] RICHERT, H.–E., *Lectures on Sieve Methods*, Bombay 1976

[52] RÜSSMANN, H., *Das Werk C. L. Siegels in der Himmelsmechanik*, JB. DMV **85**, 174–200 (1983)

[53] SCHARLAU, W. & OPOLKA, H., *Von Fermat bis Minkowski, Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung*, Springer–Verlag 1980

[54] SCHNEIDER, TH., *Das Werk C. L. Siegels in der Zahlentheorie*, Jahresbericht DMV **85**, 147–157 (1983)

[55] SCHWARZ, W., *Der Primzahlsatz*, Überblicke Mathematik **1**, 35–61 (1968)

[56] SCHWARZ, W., *Einführung in Methoden und Ergebnisse der Primzahltheorie*, Bibl. Institut Mannheim 1969, 227 pp, vergr.

[57] SCHWARZ, W., *Survey on analogues of the Waring problem: Diophantine inequalities*, Journées Théorie Additive des Nombres, Bordeaux 1977, **1978**

[58] SCHWARZ, WOLFGANG, *Über einige Probleme aus der Theorie der Primzahlen*, Sitzungsber. Wiss. Ges. Univ. Frankfurt 21/2, 1985

[59] SCHWARZ, WOLFGANG, *Einführung in Siebmethoden der analytischen Zahlentheorie*, Bibl. Inst. 1974

[60] SCHWARZ, WOLFGANG, *Geschichte der analytischen Zahlentheorie seit 1890*, in *Ein Jahrhundert Mathematik, Festschrift zum Jubiläum der DMV*, Vieweg 1990, p. 741–780

[61] SCHWARZ, WOLFGANG, *Some Remarks on the History of the Prime Number Theorem from 1896 to 1960*, in *Development of Mathematics 1900 – 1950*, edited by Jean–Paul Pier, p. 565–615

[62] SCHWARZ, WOLFGANG, *Zur Entwicklung einiger Teilgebiete der Zahlentheorie, insbesondere im 19. Jahrhundert*, erscheint in den Sitzungsberichten der Wiss. Ges. Univ. Frankfurt 2002 (?)

[63] SCRIBA, C. L. & SCHREIBER, P.. *5000 Jahre Geometrie*, Springer Verlag 2001

[64] STUBHAUG, A., *Niels Henrik Abel and his Times*, Springer 2000

[65] STUBHAUG, A., *Ein Aufleuchtender Blitz, Niels Henrik Abel und Seine Zeit*, Springer 2001

[66] TOBIES, R., *Carl Siegel zum 100. Geburtstag*, DMV–Mitteilungen 4/1996, p.29–34 (1996)

[67] VINOGRADOV, I. M., *The Method of Trigonometrical Sums in the Theory of Numbers*, Interscience Publishers

[68] VAN DER WAERDEN, B., *Erwachende Wissenschaft*, 2. Aufl. Basel/Stuttgart 1966

[69] WEBER, H., *Leopold Kronecker*, J.Ber. Dt. Math.–Vereinigung 2, 5–31 (1891/92)

[70] WEIL, A., *Zahlentheorie, Ein Gang durch die Geschichte, von Hammurapi bis Legendre*, Birkhäuser 1992

[71] WINDELBAND, W. & HEIMSOETH, H., *Lehrbuch der Geschichte der Philosophie*, Tübingen 1950

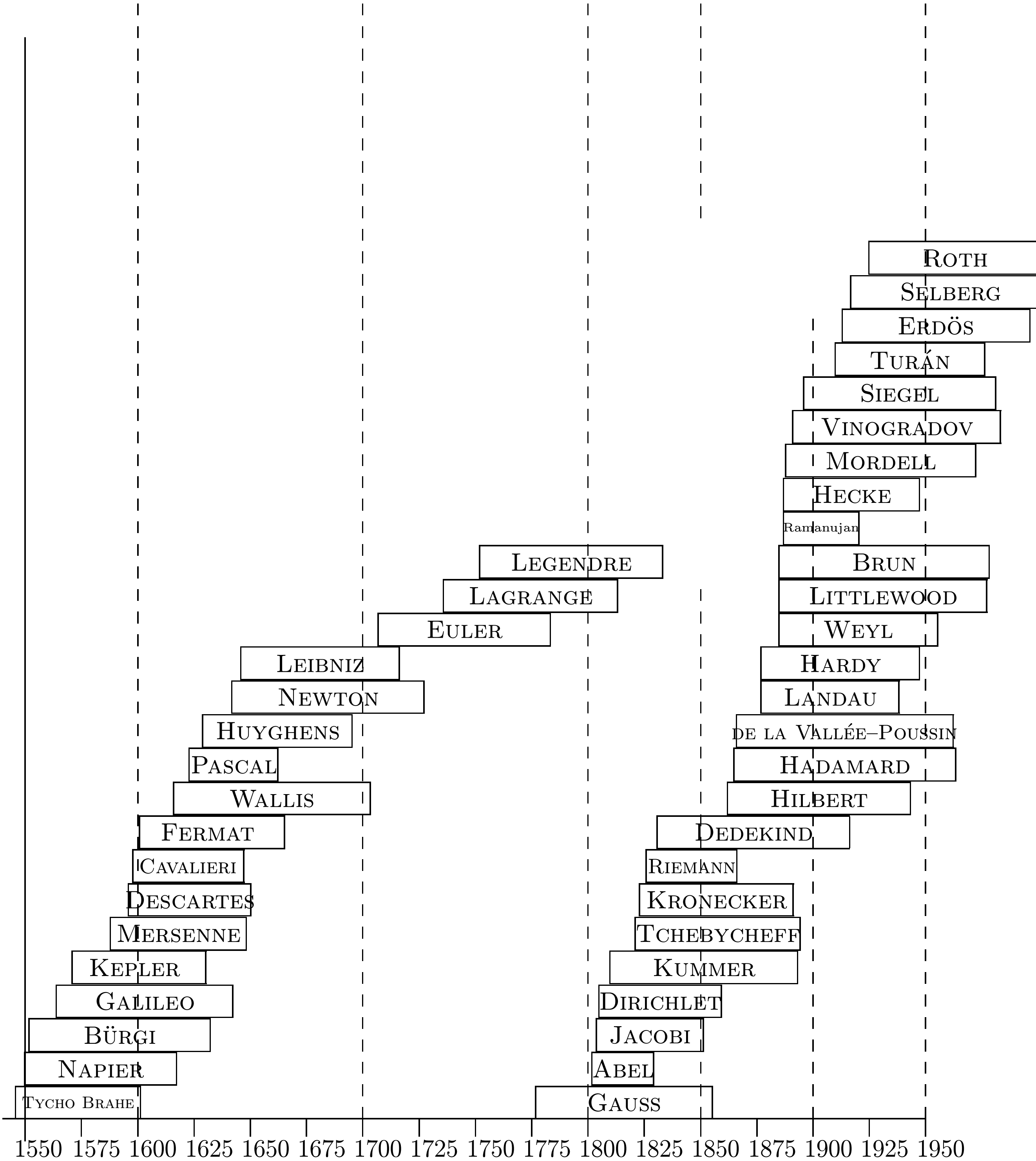
[72] WOLFART, J., *Algebra und Zahlentheorie*, Vieweg Verlag 1993

Unter der `internet`–Adresse

`http://www.dpmms.com.ac.uk`

findet man viele historische Informationen.

Zeittafel



Roth
Selberg
Erdös
Turán
Siegel
Vinogradov
Mordell
Hecke
Ramanujan
Legendre
Brun
Lagrange
Littlewood
Euler
Weyl
Leibniz
Hardy
Newton
Landau
Huyghens
de la Vallée–Poussin
Pascal
Hadamard
Wallis
Hilbert
Fermat
Dedekind
Cavalieri
Riemann
Descartes
Kronecker
Mersenne
Tchebycheff
Kepler
Kummer
Galileo
Dirichlet
Bürgi
Jacobi
Napier
Abel
Tycho Brahe
Gauss
1550 1575 1600 1625 1650 1675 1700 1725 1750 1775 1800 1825 1850 1875 1900 1925 1950

1 Einführung

1.1 Vorbemerkung

Die „Frühzeit“ der Zahlentheorie, also etwa die Zeit bis Christi Geburt, bietet für Historiker viel Interessantes — hier soll jedoch die frühe Geschichte nur ganz skizzenhaft gestreift werden; nach einer kurzen Übersicht über zahlentheoretische Entwicklungen im 18. Jahrhundert soll erst mit dem 19. Jh. richtig in den Stoff eingestiegen werden. Wer an der Frühzeit interessiert ist, kann sich etwa an Van der Waerdens *Erwachende Wissenschaft* [68] halten.

1.2 Hörerkreis

Die Vorlesung wendet sich an *Mathematiker*, die an der historischen Entwicklung des Faches interessiert sind — insbesondere wird an Kandidaten des Höheren Lehramtes für Gymnasien gedacht. Für diese ist ein weiter Horizont nützlich, um Hintergrundinformationen geben zu können und um auch ausgefallene Schülerfragen beantworten zu können. Aber auch Diplom–Kandidaten mit zahlentheoretischen Interessen sind hochwillkommen.

1.3 Zahlentheorie und Algebra

Die **Zahlentheorie** beschäftigt sich mit Eigenschaften der **ganzen** Zahlen, die mit Addition und vor allem der Multiplikation zusammenhängen, wie Teilbarkeit, Primzahlen, Faktorzerlegung, Restklassen, Erzeugende primer Restklassengruppen, … . Mit *ganzen Zahlen* sind zunächst die gewöhnlichen ganzen Zahlen, d. h. die Elemente von $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, gemeint. Allgemeiner können ganze Zahlen aber auch „ganze Zahlen“ eines algebraischen Zahlkörpers sein, oder Polynome in einer Variablen über einem Körper, … .

Die Zahlentheorie bietet eine Fülle von auch für Laien leicht formulierbaren, interessanten, schwierigen Problemen,[4] wie z. B. die Frage nach der Verteilung der Primzahlen, nach Primzahlen in Polynomfolgen, das Goldbachproblem, das Primzahlzwillingsproblem, die Frage nach der Lösbarkeit „diophantischer Gleichungen“ … . Manchmal gibt es spektakuläre Lösungen solcher jahrhundertealten Probleme — z. B. wurde vor etwa 7 Jahren die große Fermatsche Vermutung durch A. Wiles gelöst (man sehe **2.5**).

Zur Behandlung ihrer Probleme verwendet die Zahlentheorie neben elementaren Überlegungen eine Vielzahl von Methoden aus anderen Teilgebieten der Mathematik, wie Analysis (Funktionentheorie, Residuenkalkül, Potenzreihen, Dirichletreihen, Fourierreihen, Summierbarkeitstheorie, Taubersätze), Harmonische Analysis, Spezielle Funktionen (Theta-Funktionen, Modulfunktionen, Zetafunktionen, …), Wahrscheinlichkeitstheorie, numerische Mathematik, Algebra, Algebraische Geometrie, etc.

[4]Man vgl. z. B. Guy [20], oder *Solved and Unsolved Problems in Number Theory* von D. Shanks, 1962, oder die Problemsammlungen von P. Erdös.

Die **Algebra** beschäftigt sich mit „Strukturen“ und versucht, unter Zuhilfenahme geschickter Begriffsbildungen aus wenigen Grundannahmen interessante Ergebnisse zu deduzieren. So werden in der Algebra z. B. Gruppen, Ringe und Körper, die durch wenige „Axiome“ definiert sind, untersucht. Mächtige Impulse für die Entwicklung der Algebra kamen aus der Fragestellung, Nullstellen von Polynomen durch „Radikale“ (d. h. geschachtelte Wurzelzeichen) auszudrücken. Die [Un–]Möglichkeit solcher Darstellungen [für Polynome vom Grade ≥ 5] wurde im 19. Jahrhundert durch N. H. Abel[5] und die Galoistheorie entschieden.

Der Hauptsatz der Galoistheorie ist ein typisches Beispiel für *moderne* Mathematik: einem komplizierten Objekt (der Menge der Unterkörper einer endlichen, normalen und separablen algebraischen Körpererweiterung) werden in überschaubarer Weise (durch geeignete Abbildungen mit „guten“ Eigenschaften) „einfachere“ Objekte (die Untergruppen einer endlichen Gruppe, der Galoisgruppe) zugeordnet; diese Zuordnung kann ausgenützt werden, Eigenschaften des [komplizierteren] Ausgangsobjekts aufzuspüren.

Es sollte nicht vergessen werden, daß viele Begriffsbildungen und Beweismethoden der Algebra auf Fragen und Ergebnisse der Zahlentheorie zurückgehen, die in der Algebra in einen allgemeineren Rahmen gestellt werden. Z.B. ist der „Kleine Fermatsche Satz“

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p, \text{ wenn } (a,p) = 1 \text{ ist},$$

ein Vorläufer eines Satzes der Gruppentheorie: in jeder Gruppe (die nicht kommutativ zu sein braucht) der Ordnung N ist die N–te Potenz jeden Elementes das Einselement der Gruppe. Das Studium zahlentheoretischer Kongruenzen ist nichts anderes als die Untersuchung von Restklassenringen, „primitive Kongruenzwurzeln“ sind Erzeugende der zyklischen (!) Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, etc.
Wegen dieses engen Zusammenhangs zwischen gewissen Fragestellungen der Algebra und der Zahlentheorie wird in Frankfurt häufig die Vorlesung *Algebra und Zahlentheorie* angeboten, z.B. durch Herrn Behr oder Herrn Wolfart, und von J. Wolfart gibt es hierzu ein sehr lesenswertes Buch ([72]).

2 Die Zeit vor 1700

2.1 Mesopotamien und Ägypten

Mit Problemen aus der Zahlentheorie haben sich schon Babylonier und Ägypter beschäftigt,[6] vermutlich aus praktischen Erwägungen zur Behandlung von Fragen der Astronomie, der Baukunst und der Landvermessung.

[5] Man vgl. Abschnitt **5.2**.

[6] Man vgl. hierzu insbesondere [32], „Mathematik im alten Ägypten“, und „Mathematik im alten Mesopotamien“, sowie [68]. Eine ganz kurze Beschreibung findet sich auch in [19], p. 118 f. Die chinesische Mathematik wird hier nicht behandelt, einige Hinweise findet man z. B. in [19], **57**. Für die Mathematik im vorspanischen Amerika sehe man [32], p. 316.

2.1.1 Babylon

Im alten Mesopotamien sind solche [obengenannten] Anwendungen bei den *Babyloniern* während des gesamten Zeitraums 3000 v.Chr. bis etwa Christi Geburt auf Verwaltungsdokumenten (in Keilschrift) dokumentiert. Das verwendete Zahlensystem hatte die Basis 60. Die [wegen des Fehlens eines Zeichens für die Null unvollkommene] Stellenwertschreibung scheint die älteste bekannte zu sein. Etwa ab dem 2. Jahrtausend v. Chr. wurde auch das Zehnersystem benutzt.

Es gab z.B. Listen von Reziproken, Multiplikationstafeln und Tafeln von Quadraten. Es wurden Zins– und Zinseszinsrechnung, Fragen des Bauwesens und Transports, und Erbteilungen behandelt. Lineare Gleichungen mit 1, 2, 3 Unbekannten werden studiert, ebenso quadratische und biquadratische Gleichungen. Die Fläche von Dreiecken und Kreisen wird berechnet ($\pi \asymp 3$, aber auch 3.125). Der Satz von PYTHAGORAS ist bekannt. Im 1. Jahrtausend wird der Zahlenbereich auf Grund der Bedürfnisse des Astronomie auf 60^6 und bis 60^7 erweitert.

Ergebnisse der frühen griechischen Mathematik (THALES, Pythagoräer) sind vermutlich teilweise auf babylonische Einflüsse zurückzuführen.

2.1.2 Ägypten

Die *ägyptische* Mathematik benutzte ein Zehnersystem, jede Zehnerpotenz bis 10^6 hat ein eigenes Hieroglyphenzeichen. Abrechnungen, Bauskizzen und kalendarische Berechnungen finden sich schon ca. 2000 v. Chr. Die Mathematik ist ein praxisorientiertes System von Methoden, die zur Lösung von Aufgaben benötigt wurden. Bruchrechnung wird mit Stammbrüchen (der Gestalt $\frac{1}{n}$) durchgeführt.[7] Die Flächenberechnung für Rechteck, Dreieck, Trapez und Kreis [mit $\pi \approx 4 \times (8/9)^2 = 3.16$], die Volumberechnung von Quader, Zylinder, Pyramide, Kegel, und die Oberfläche der Halbkugel sind bekannt. Der Goldene Schnitt wird zur harmonischen Gestaltung von Gebäuden (Tempel, Grabanlagen) verwendet.[8] Die Gleichung

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

ermöglichte die Erzeugung rechter Winkel.

2.2 Griechische Mathematik

Die selbständige und selbstbewußte Erkenntnisarbeit der Wissenschaft, die Wissen um seiner selbst willen methodisch sucht, gibt es wohl erst seit dem Anfang des 6. Jh. v.Ch.

[7]Das Problem, ob jeder Bruch $\dfrac{4}{n}$ mit $n > 4$ als Summe von drei Stammbrüchen darstellbar ist, $\dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{w}$, ist bis heute nicht entschieden. Die Menge der Ausnahmen ist freilich recht klein, man vgl. z.B. MONTGOMERY & VAUGHAN, Mathematika **17**, 1970, 193–198.

[8]Diese Ideen wurden von den bildenden Künstlern der Renaissance wieder aufgenommen; man denke an die berühmte Darstellung der Proportionen des menschlichen Körpers von LEONARDO DA VINCI (1452–1519).

– bei den Griechen; der mächtige Aufschwung des nationalen Lebens entfachte die geistigen Kräfte diese Volkes. ... . Die griechische Wissenschaft wandte sich zunächst Problemen der Naturforschung zu und prägte begriffliche Grundformen für die Auffassung der äußeren Welt aus.[9] PYTHAGORAS machte die ganzen Zahlen zur Grundlage seines philosophischen Denkens.[10]

2.2.1 Zeittafel

THALES VON MILET,	* ≈ 625 v. Chr. (Milet, Kleinasien), † ≈ 547.[11]
PYTHAGORAS von Samos,	* ≈ 580 v. Chr. zu Samos, † ca. 500 v. Christus, in Metapont (Unteritalien)
PLATO	* 427, † 347 (Athen)
ARISTOTELES	* 384 (Stag[e]ira), † 322 (Chalkis).
EUKLID,	lebte um 300 v. Chr. in Athen (?), Alexandria.
ARCHIMEDES,	* ≈ 287 v. Ch., Syrakus, † 212, Syrakus.
ERATOSTHENES,	* 275 v. Ch., † 194 v. Chr.
DIOPHANTOS von Alexandria,	lebte um 250 n. Chr. in Alexandria.[12]

2.2.2 PYTHAGORAS, ≈ 580 – 500 v. Ch.

Die Pythagoreer suchten die Lösung metaphysischer Probleme mit Hilfe der Mathematik. *Der pythagoreische Bund ist gegen Ende des 6. Jahrhundert. v.Ch. in den Städten Großgriechenlands als eine religiös–politische Genossenschaft hervorgetreten.*[13]
Gegründet von PYTHAGORAS machte dieser die *Stadt Kroton zum Ausgangspunkt eines Reformationsversuches, dessen Ziel eine Läuterung des sittlichen und religiösen Lebens sein sollte. Gemeinsame Beschäftigung mit Musik und Mathematik war den Mitgliedern des Bundes auferlegt.*
Solche Aussagen sind mit Vorsicht zu behandeln, denn (wieder nach [71]): *„Die Nachrichten über die Lehre der Pythagoräer sind, zumal in den späteren Berichten, durch so viel fremde Zusätze getrübt, daß vielleicht an keinem Punkte der antiken Philosophie die Feststellung des Tatsächlichen so vielen Schwierigkeiten begegnet wie hier. Selbst wenn man das Zuverlässigste (Aristoteles ...) herausschält, so bleiben ... viele dunkle Punkte und widerspruchsvolle Angaben übrig.*

Nach [32] bestand die *Besonderheit der mystischen Vorstellungen der Pythagoräer in der Ansicht, daß es auf dem Weg zum Transzendenten notwendig sei, sich mit den Geheimnissen der Zahlen zu beschäftigen. Als Zahlen werden nur die ganzen positiven Zahlen anerkannt, ...*

---

[9] WINDELBAND & HEIMSOETH, [71], p. 22, 23.

[10] Man vgl. auch [19], p. 187 f.

[11] [19] gibt die Lebensdaten ≈ 639 – ≈ 546. THALES VON MILET war ein Kaufmann mit geometrischen Interessen. Er versuchte, die Welt aus natürlichen Ursachen zu erklären und mathematische Sachverhalte zu verifizieren. — Man vgl. jedoch [32], p. 456: *„Unsere Informationen über Leben und Werk von T. v. M. sind umstritten."*

[12] Lebensdaten ≈ 246 – ≈ 330 nach [19]. Man vgl. auch [14], p. 60.

[13] [71], p. 27., p. 28.

Zur Zahlentheorie hat die pythagoräische Schule beigetragen durch die Unterscheidung von geraden und ungeraden Zahlen, durch den Begriff der Teilbarkeit, durch den Begriff der vollkommenen Zahl,[14] durch den Begriff der befreundeten Zahlen (amicable numbers)[15] und der Dreieckszahlen $1, 3, 6, 10, \ldots$, gegeben durch $\Delta_n = \Delta_{n-1} + n$, wobei $\Delta_0 = 0$ ist.

2.2.3 Euklid, um 300 v. Chr.

Über EUKLIDs Leben[16] (um 300 v. Chr.) ist fast nichts bekannt.[17] Er ist berühmt als *„Autor des einflußreichsten Mathematikbuches aller Zeiten und gilt als Begründer der mathematischen Schule von Alexandria"*.[18] Das 13–bändige Werk „Elemente" befaßt sich mit

- ▷ der Geometrie der Ebene (Band I–IV),
- ▷ der Proportionenlehre (Band V–VII),
- ▷ der Zahlentheorie (Band VII–IX).
- ▷ Ergebnissen der Stereometrie sind Band XI–XIII gewidmet.

Den *Elementen* kommt *„ein Verdienst von überragender historischer Bedeutung zu: Er* [Euklid] *präsentiert das Material in Form von Definitionen, Axiomen, Postulaten, Sätzen, Aufgaben und Beweisen. Damit bildet sein Werk den Höhepunkt eines Prozesses der wissenschaftlichen Strukturierung mathematischer Kenntnisse* … " (aus [32], p. 139).

Die Bände zur Zahlentheorie scheinen [zumindest teilweise] pythagoräischen Ursprungs zu sein. Als wichtige Bausteine der elementaren Zahlentheorie nennen wir

- ▷ EUKLIDs Algorithmus und EUKLIDs Lemma,[19]

---

[14] n heißt vollkommen, wenn $\sigma(n) = \sum_{d|n} d = 2 \cdot n$ ist. Beispiele sind $6, 28, \ldots$; im 18. Jahrhundert wurde gezeigt, daß ein gerades (!) n genau dann vollkommen ist, wenn $n = 2^{k-1} \cdot \left(2^k - 1\right)$ ist und $2^k - 1$ prim ist. — Aus Bundschuh, [13], p. 10, sei zitiert: *Der christliche Theologe und Philosoph* AUGUSTINUS *(354–430) begründete die Erschaffung der Welt in sechs Tagen damit, daß Gott die Vollkommenheit seines Werkes auch durch die Vollkommenheit der Zahl 6 zum Ausdruck bringen wollte.*

[15] Die Zahlen m, n heißen *befreundet* (amicable), wenn $\sigma(n) = \sigma(m) = m + n$ ist. Beispiele sind: $n = 284 = 2 \times 2 \times 71$, $m = 220 = 2 \times 2 \times 5 \times 11$, denn die Teiler von n sind $1, 2, 4, 71, 142, 284$, also ist $\sigma(n) = 504 = 284 + 220$, und die Teiler von m sind $1, 2, 4, 5, 10, 11, 22, 20, 44, 55, 110, 220$, mit der Summe $= 504$. — L. EULER kannte 61 Paare befreundeter Zahlen. Nach H. J. J. TE RIELE (Math. of Comp. **28**, 1974) sind $m = 3^4 \times 5 \times 11 \times 5281^{19} \times 29 \times 89 \times \left(2 \times 1291 \times 5281^{19} - 1\right)$, und $n = 3^4 \times 5 \times 11 \times 5281^{19} \times 29 \times 89 \times \left(2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 1291 \times 5281^{19} - 1\right)$ befreundet.

[16] EUKLID [von Alexandria] sollte nicht mit dem Philosophen EUKLID VON MEGARA ($\approx$ 450–380 v. Chr.) verwechselt werden.

[17] Aus [14] sei zitiert: *According to the studies of* H. VOGT*, Euclid was born about 365 B.C. and wrote his Elements between 330 and 320 B.C. Euclid …was younger than Plato and older than* ERATOSTHENES *and* ARCHIMEDES ….

[18] [32], p. 138.

[19] $p \mid a \cdot b \Rightarrow (p \mid a \text{ oder } p \mid b)$, wenn p prim ist.

▷ einen Beweis des Fundamentalsatzes der elementaren Zahlentheorie,

▷ einen Beweis der Unendlichkeit der Menge der Primzahlen.

Nach EUKLID stagnierte die Entwicklung der Zahlentheorie. CAJORI, [14], p. 58, drückt dies so aus: *„After the death of Euclid, the theory of numbers remained almost stationary for 400 years. Geometry monopolised the attention of all Greek mathematicians. Only two are known to have done work in arithmetic worthy of mention. Eratosthenes ...“* and *„Hypsides (between 200 and 100 B.C) worked at the subjects of polygonal numbers and arithmetical progressions ...“*

2.2.4 Archimedes, 287 – 212 v. Chr.

ARCHIMEDES ($\approx$ 287–212 v. Chr.) war ein hochbedeutender Mathematiker und Ingenieur. Er wurde bekannt vor allem durch Beiträge zur Geometrie (z.B. Fläche des Parabelsegments, Kreismessung), Hydrostatik (Archimedisches Prinzip), und die Konstruktion technischer Geräte (Hebelgesetze). In der Analysis gilt ARCHIMEDES (mit EUDOXOS) als Schöpfer der Exhaustionsmethode zur Flächenberechnung ebener Figuren. In der Arithmetik dehnt ARCHIMEDES mit der Zählung von Sandkörnern im Universum die natürlichen Zahlen bis 10^{63} aus und bemerkt, daß die Folge der natürlichen Zahlen bis ins Unendliche fortgeführt werden könne.

2.2.5 Diophant, um 250 n. Chr.

Das Hauptwerk „Arithmetica“[20] von DIOPHANT ($\approx$ 246 – $\approx$ 330 n. Chr. (?), nach [19]) behandelt anhand zahlreicher spezieller Beispiele die Lösung von „diophantischen Gleichungen“ (in positiven, rationalen Zahlen) in mehreren Unbekannten bis zum 6. Grade. Irrationale oder negative Zahlen werden nicht als Lösungen akzeptiert. Die Methodik besteht i. a. darin, Substitutionen der Unbekannten zu wählen, die das Problem auf bekannte Gleichungen reduzieren. Man vgl. die ausführliche Darstellung in A. Weil [70], p. 27–33, und [14], p. 60–62. Weitere Informationen findet man in [7].

2.2.6 Eratosthenes von Kyrene

ERATOSTHENES war ein vielseitiger Gelehrter. Nach [32] lebte er $\approx$ 284 – $\approx$ 200 v. Chr., nach [19] $\approx$ 275–194 v. Chr. Für die Zahlentheorie ist sein „Sieb des Eratosthenes“ zur raschen Erstellung von Primzahltafeln von Bedeutung.

2.3 Mittelalter

Mit dem Untergang der griechischen Staaten erlosch in Mitteleuropa eine lange Blütezeit der mathematischen Wissenschaften und der Zahlentheorie. Das griechische Gedankengut wurde aber ins Arabische übertragen, bearbeitet und weiterentwickelt.[21]

[20] Angeblich 13 Bände, von denen 7 erhalten sind. CLAUDE-GASPAR BACHET DE MÉZIRIAC (1581–1638) gab 1621 eine kommentierte Fassung der „Arithmetica“ in griechischer und in lateinischer Sprache heraus.

[21] Man vgl. hierzu z. B. [14], p. 99–112.

Wir erwähnen den Namen Mohammed ibn Musa Al-Khowarizmi ($\approx$ 780(?)–850), der durch Schriften zur Algebra, Arithmetik und Astronomie bekannt wurde.
Wir überspringen diesen Zeitraum, während dessen die Entwicklung der mathematischen Wissenschaft in arabischen Ländern am Leben gehalten wurde, und wir überspringen auch das „finstere Mittelalter" bis zum 12. Jahrhundert.[22]
Die Periode der Übersetzung arabischer [mathematischer] Quellen ins Lateinische begann um 1100 und erreichte einen Höhepunkt mit Gerard von Cremona ($\approx$ 1114–1187).[23]
Unter den Förderern der Wissenschaft durch Förderung der Übernahme arabischer Quellen ist der von griechischen und arabischen Lehrern erzogene Kaiser Friedrich II. von Hohenstaufen (1194–1250) zu nennen, der auch 1224 die Universität Neapel gründete.

2.3.1 Fibonacci, 1170 (?) – 1250 (?)

Leonardo di Pisa, auch Fibonacci (der Sohn des Bonacci), um 1170 in Pisa geboren, um 1250 gestorben, war vielgereist (Ägypten, Syrien, Griechenland, Sizilien), und eignete sich vermutlich arabisches und griechisches mathematisches Wissen an, das er weiterentwickelte.
Sein `Liber abaci`, Pisa, 1202, 1228, wurde ein Markstein in der Entwicklung der Mathematik des Mittelalters.[24] Fibonacci verwendet die arabischen Ziffern (einschließlich der Null)[25] und führt negative Zahlen (als Schulden) ein.
Mit seinem Namen verbunden ist die rekurrente Folge der Fibonacci–Zahlen, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, wobei $x_0 = x_1 = 1$ ist.
Fibonacci zeigt 1228 (?), daß die Gleichung $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ keine positive ganze Zahl, keinen rationalen Bruch, keine Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl und keine Irrationalität der Gestalt $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ als Lösung besitzt. Die positive Lösung wird mit einem Fehler von 3×10^{-11} angegeben. Damit leistet er erste Vorarbeiten zur Auflösung der kubischen Gleichung durch Radikale, die erst im 16. Jh. gelang (Scipione dal Ferro (1465–1526), um 1508, N. Tartaglia ($\approx$ 1500-1557), um 1535, G. Cardano (1501–1576); die Cardanosche Formel wurde 1545 veröffentlicht. L. Ferrari (1522–1569) löst die Gleichung 4. Grades durch Radikale. Zur Lösung der (beim Zusammentreffen mit Kaiser Friedrich II. gestellten) Aufgabe durch Fibonacci, die Gleichung $y^2 - x^2 = z^2 - y^2 = 5$ in ganzen Zahlen zu lösen, vgl. man [70], p. 13/14.

[22] Aus [14], p. 114, sei für das 8. Jahrhundert zitiert: *„...the art of calculating always found some little corner in the curriculum for the education of monks"*. Gegen Ende des 10. Jahrhunderts ([14], p. 115) ist Gerbert von Aurillac (um 940(?)–1003, ab 999 Papst Silvester II.) zu erwähnen, *„...the greatest mathematician of the tenth century in Europe"* [14], p. 115. *„The thick gloom of ignorance commenced to disappear. The zeal with which the study of mathematics was now taken up by the monks is due principally to the energy and influence of one man, —* **Gerbert**.

[23] Aus [32], p. 169. *„Diese Übersetzungen philosophischer, mathematischer, astronomischer, astrologischer, alchimistischer und medizinischer Schriften haben das wissenschaftliche Leben des lateinischen Mittelalters wesentlich geprägt und bis in die Neuzeit gewirkt."*

[24] *„Leonardo of Pisa is the man to whom we owe the first renaissance of mathematics on Christian soil."* [14], p. 120.

[25] Noch im 14. Jh. wurde der Gebrauch der bequemen dekadischen Ziffern für die Banken von Florenz verboten, J. Koebel rechnete noch 1514 mit römischen Ziffern.

2.3.2 Nach Fibonacci

Zur Beschreibung der Zeit nach FIBONACCI zitieren wir aus [14], p. 124. *„One would have thought that after so brilliant a beginning, the sciences transplanted from Mohammedan to Christian soil would have enjoyed a steady and vigorous development. But this was not the case. During the fourteenth and fifteenth centuries, the mathematical science was almost stationary. Long wars absorbed the energies of the people and thereby kept back the growth of the sciences."*

Wir überspringen die astronomischen, algorithmischen und trigonometrischen Beiträge von REGIOMONTANUS (1436–1476) und die algorithmischen, algebraischen und trigonometrischen Beiträge von FRANCOIS VIÈTE (Vieta, 1540–1603) und kommen in **2.4** zu dem Franziskanermönch M. MERSENNE und dessen zahlentheoretischen Beiträgen.[26] Zuvor soll ganz kurz auf einen wichtigen Beitrag von KEPLER zur Zahlentheorie hingewiesen werden.

2.3.3 J. Kepler und die dichteste Kugelpackung

JOHANNES KEPLER wurde am 27. 12. 1571 in Weil der Stadt geboren und verstarb am 15. 11. 1630 in Regensburg. Er war vorwiegend in der Astronomie tätig, sein Hauptwerk `Astronomia nova` erschien 1609; in diesem wird die Himmelsmechanik begründet.
1611 stellt KEPLER das Problem, die dichteste [nicht notwendig gitterförmige] Kugelpackung im dreidimensionalen Raum zu bestimmen. Die Packungsdichte ist der Grenzwert (für $R \to \infty$) des Quotienten aus dem Gesamtvolumen der in einen Würfel der Kantenlänge R passenden Einheitskugeln dividiert durch das Volumen R^3 des Würfels.
In verallgemeinerter Form wurde das Problem von D. HILBERT am Ende von Problem 18 seiner berühmten Probleme gestellt; wir zitieren nach [12], p. 500: *How can one arrange most densely in space an infinite number of equal solids of given form, e.g. spheres with given radii, ..., that is, how can one so fit them together that the ratio of the filled to the unfilled space may be as great as possible.*
In $\mathbb{R}^2$ wurde das Problem durch THUE, 1910,[27] und FEJES TOTH, 1940, gelöst – die hexagonale gitterförmige Packung ist die dichteste, mit der Packungsdichte $\dfrac{\pi}{2 \cdot \sqrt{3}} = 0.906899\ldots$. Im $\mathbb{R}^3$ konnte das Problem erst 1998 durch T. HALES entschieden werden.[28] Auch hier ist die gitterförmige Packung eine der dichtesten, mit der Packungsdichte $\dfrac{\pi}{3 \cdot \sqrt{2}} = 0.740480\ldots$. Es gibt jedoch nicht–gitterförmige Packungen mit gleicher Packungsdichte.
Das Problem der dichtesten *gitterförmigen* Kugelpackung – d.h. die Mittelpunkte der Kugeln bilden ein Gitter im $\mathbb{R}^n$, wurde durch LAGRANGE 1773 und GAUSS 1831 aufgeworfen und für $n = 2$ (LAGRANGE) und $n = 3$ (GAUSS, SEEBER) beantwortet.

[26] A. WEIL ([70], p. 35/36) schildert die Verdienste des Landadligen C.–G. BACHET DE MÉZIRIAC (1581–1638) für die Zahlentheorie. Es ist ihm zu danken, daß insbesondere P. FERMAT auf einen zuverlässigen Text von DIOPHANT zurückgreifen konnte.

[27] Der Beweis hat eine Lücke.

[28] Man vgl. auch C. A. ROGERS, *Packing and covering*, Cambridge University Press 1964.

Die Packungsdichte der dichtesten gitterförmigen Kugel–Packung im $\mathbb{R}^d$ für $d = 4, \ldots, 8$ ist bekannt und wird in folgender Tabelle gegeben.

d	Packungsdichte	
4	$\frac{\pi^2}{16} = 0.616850\ldots$	Korkin & Zolotarev 1872
5	$\frac{\pi^2}{15 \cdot \sqrt{2}} = 0.465257\ldots$	Korkin & Zolotarev 1877
6	$\frac{\pi^3}{48 \cdot \sqrt{3}} = 0.372947\ldots$	Blichfeldt, 1925
7	$\frac{\pi^3}{105} = 0.295297\ldots$	Blichfeldt, 1926
8	$\frac{\pi^4}{384} = 0.253699\ldots$	Blichfeldt, 1934

2.4 Mersenne, 1588 – 1648

M. Mersenne[29] war ein Zahlenliebhaber, der mit führenden Gelehrten seiner Zeit korrespondierte. Er war an vollkommenen Zahlen interessiert.[30] Mersenne gab 1640 eine (fehlerhafte) Liste von Primzahlen der Gestalt $M_q = 2^q - 1$, für Primzahlen $q \leq 257$; er behauptete, daß M_q für $q = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ und 257 prim sei. Dies trifft für $q = 11$ $(M_{11} = 23 \times 89), q = 67$ und $q = 257$ nicht zu, und die Primzahlen M_{61}, M_{89} und M_{107} wurden vergessen.[31]
1750 gab L. Euler folgendes Kriterium (das durch J. L. Lagrange 1775 und später (1878) durch E. Lucas 1878 bewiesen wurde):
Ist $q \equiv 3 \bmod 4$ *prim, so ist* $2q + 1$ *ein Teiler von* M_q *genau dann wenn* $2q + 1$ *prim ist.*[32]
Heute berechnet man eine rekurrente Folge nach dem Vorgehen von Lucas, 1878,[33] um zu entscheiden, ob M_q prim ist.[34]
Bis heute ist unbekannt, ob es unendlich viele Mersennesche Primzahlen gibt. Man könnte (nur aus heuristischen Gründen!) vermuten, daß die Anzahl der Mersenneschen Primzahlen $\leq x$ asymptotisch gleich $\frac{1}{\log 2} \cdot e^{\mathcal{C}} \cdot \log\log x$ ist, wobei $\mathcal{C}$ die Euler–[Mascheroni]sche Konstante bezeichnet.

[29] *„Marin Mersenne (1598–1648) rendered great services to science. His polite and engaging manner, procured him many friends, including Descartes and Fermat. He encouraged scientific research, carried on an extensive correspondance, and thereby was the medium for the inter-communication of scientific intelligence.“* [14], p. 163.

[30] n ist vollkommen, wenn $\sum_{d|n} d = 2n$ ist. Euklid zeigte, daß $2^n \cdot (2^{n+1} - 1)$ vollkommen ist, wenn der zweite Faktor eine Primzahl ist. Die Existenz ungerader vollkommener Zahlen ist auch heute noch offen (wenn auch sehr unwahrscheinlich!).

[31] Derzeit sind 33 Mersennesche Primzahlen bekannt. Die größte ist die 1993 durch D. Slowinski & P. Gap gefundene 258716-stellige Zahl M_{859433}. Man vgl. [50], p. 90–98.

[32] Somit ist M_{11} durch 23 teilbar, denn 11 ist prim und $\equiv 3 \bmod 4$.

[33] F. É. A. Lucas (1842–1891) studierte im Amer. J. Math. 1 (1878) in systematischer Weise rekurrente Folgen.

[34] M_q ist genau dann prim wenn M_q ein Teiler von S_{q-2} ist, wobei $S_0 = 4, S_1 = 14, \ldots, S_{k+1} = S_k^2 - 2$ ist.

2.5 Fermat, ≈ 1607–1665

PIERRE DE FERMAT wurde als Sohn einer geachteten bürgerlichen Familie in Beaumont de Lomagne nahe Toulouse, wahrscheinlich zwischen dem 13.01.1607 und dem 12.01.1608 (Mutter CLAIRE DE LONG, Vater DOMINIQUE) geboren.[35]
Nach Abschluß der juristischen Studien war FERMAT etwa ab 1627 in Bordeaux (vermutlich als Anwalt) tätig und heiratete 1631 LOUISE DE LONG. Am 14. Mai 1631 wurde er in den Obersten Gerichtshof zu Toulouse aufgenommen.[36]
FERMAT verstarb am 12. 01. 1965 in Castres.[37]
FERMAT gab wichtige Beiträge zur Geometrie, zur Differential– und Integralrechnung, zur Wahrscheinlichkeitstheorie und zur Algebra.[38]
1640 fragte FRENICLE DE BESSY (≈ 1605–1675) FERMAT nach einer [geraden] vollkommenen Zahl zwischen 10^{20} und 10^{22}. Es kommt höchstens $2^{36} \cdot (2^{37} - 1)$ hierfür in Frage; aber $2^{37} - 1$ ist keine Primzahl. Hierfür benutzte FERMAT den „Kleinen Fermatschen Satz“[39],[40]

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p,$$

wenn $\mathrm{ggT}(a, p) = 1$ ist. Wenn $p \mid (2^{37} - 1)$ gilt, dann ist $p \equiv 1 \bmod 37$ (weil $2^{p-1} \equiv 1 \bmod p$), sogar $p \equiv 1 \bmod 74$; $p = 3 \cdot 74 + 1$ erweist sich als Teiler von $2^{37} - 1$.
Die FERMATschen Zahlen $F_n = 2^{2^n} + 1$ (die z. B. für die Konstruierbarkeit regulärer Vielecke von Bedeutung sind) sind nach FERMAT für $n = 1, 2, \ldots$ Primzahlen. EULER zeigte jedoch, daß eventuelle Primteiler von F_n die Gestalt $k \cdot 2^{n+2} + 1$ haben und fand damit leicht, daß F_5 durch 641 teilbar ist; bis heute wurde keine FERMATsche Primzahl F_n mit $n > 5$ gefunden.[41]
Im Bereich der diophantischen Gleichungen zeigte FERMAT, daß eine Primzahl $p \equiv 1 \bmod 4$ im wesentlichen genau auf eine Art als Summe zweier Quadrate darstellbar ist, und er fragte nach der Anzahl der Lösungen von $N = x^2 + y^2$. Die PELLsche Gleichung $Nx^2 + 1 = y^2$ hat unendlich viele Lösungen, wenn N kein Quadrat ist. Die

[35] In [32] und fast allen anderen Quellen wird für PIERRE DE FERMAT das Geburtsdatum (? Taufdatum !) 20.08.1601 angegeben; seine Mutter wäre dann FRANÇOISE CAZANEUVE. KLAUS BARNER aus Kassel, [5], [6], trägt jedoch gewichtige Hinweise dafür zusammen, daß PIERRE DE FERMAT erst nach dem 13.01.1607 geboren wurde und daß der am 20.08.1601 getaufte PIERRE DE FERMAT ein früh verstorbener [Halb–]Bruder (aus der ersten Ehe des Vaters) des berühmten PIERRE DE FERMAT ist.

[36] FERMAT hatte zwei Söhne: Clément–Samuel wurde Richter (genauer *conseiller et commissaire aux requêtes*, ab 11. 3. 1662 – man vgl. [8]), der zweite Sohn Jean Geistlicher; von den Töchtern Claire, Catherine und Louise heiratete eine, zwei gingen ins Kloster. Mit FERMAT hat sich KLAUS BARNER, [5], [6] intensiv beschäftigt. Man vgl. auch dessen präzise, auf gründlichen Recherchen beruhende Darstellung [8] *Das Leben Fermats* im Jahresbericht der DMV 3/2001.

[37] In [70] wird ein ganzes Kapitel (Kap. II, Fermat und seine Korrespondenten) dem Wirken FERMATs gewidmet.

[38] Z. B. benutzte FERMAT Binomialkoeffizienten, um Sätze über Summen der Gestalt $\sum_{n=1}^{N}(an+b)^m$ zu finden.

[39] Wir halten uns an [70], p. 55 ff.

[40] L. EULER bewies diesen Satz erneut um 1750 und verschärfte ihn zu $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \bmod m$.

[41] Man vgl. [50], p. 83–90. Es bleiben viele Fragen offen: Gibt es unendlich viele FERMATsche Primzahlen? Gibt es unendlich viele zusammengesetzte FERMATsche Zahlen? Sind alle FERMATschen Zahlen quadratfrei? Man gebe Faktoren von F_{20} und F_{22}. …

Methode[42] des "descente infinie" führt zum Beweis der nichttrivialen Unlösbarkeit der Gleichungen $x^3 + y^3 = z^3$ und $x^4 - y^4 = z^2$. Die Gleichung $x^2 + 2 = y^3$ hat eine ganzzahlige Lösung, die Gleichung $x^2 + 4 = y^3$ genau zwei.
Die große FERMAT–Vermutung („Fermat's last theorem") besagt, daß $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ ganzzahlig nichttrivial unlösbar ist. FERMAT glaubte, diesen Satz bewiesen zu haben.[43]
Wichtige Beiträge zum FERMAT–Problem stammen von E. E. KUMMER (man sehe **6.1**, p. 42, MIRIMANOFF, VANDIVER; ...).[44]
Gestützt auf bekannte Kriterien zeigte S. WAGSTAFF 1978 mit Computerhilfe die Unlösbarkeit der Fermat-Gleichung für $2 < n < 125000$. ADLEMAN, FOUVRY & HEATH–BROWN (man vgl. FOUVRY, Invent. Math. 79, 383–407, 1985) zeigten Ergebnisse über die Verteilung der Primzahlen, die die Unlösbarkeit der Fermatgleichung $x^p + y^p = z^p$, $p > 2$, im „Ersten Fall" ($p \nmid xyz$) für mehr als $\frac{2}{3}$ aller Primzahlen implizierten. Aus G. FALTINGs Beweis der MORDELLschen Vermutung (1983) folgt, daß die Fermatgleichung höchstens endlich viele „primitive" Lösungen besitzt. Der Beweis der FERMATschen Vermutung gelang — über den Umweg eines aufwendigen Studiums elliptischer Kurven — schließlich A. WILES 1993 (Princeton). Diese großartige Leistung brachten neben dem Wolfskehl–Preis[45] dem bescheidenen, zurückhaltenden WILES eine Vielzahl von Auszeichnungen und sichern ihm einen Ehrenplatz im Kreise der größten Mathematiker der Welt.[46]

Zu FERMATs Beweisen liest man bei A. WEIL [70], p. 125: *„Fermat's Beweise sind fast vollständig von der Bildfläche verschwunden. Sie zu einer Zeit aufzuschreiben, als die algebraische Notation noch äußerst schwerfällig war und Vorbilder fehlten, dürfte riesige Anstrengung gekostet haben. Überdies muß das völlige Desinteresse bei einem Teil seiner Zeitgenossen deprimierend gewesen sein."*

2.6 Mathematik im 17. Jahrhundert

Aus dem Encyclopedic Dictionary of Mathematics, 2^{nd} ed. [19], p. 986, entnehmen wir (in freier Übersetzung).
„Das 17. Jahrhundert bringt bemerkenswerte Ereignisse in der Geschichte der Naturwissenschaften: Galileo's (1564–1642) Arbeiten zur Mechanik, die Entdeckung der analytischen Geometrie durch R. Descartes (1596–1650), frühe Forschungstätigkeit in der Wahrscheinlichkeitstheorie durch P. de Fermat (1601–1665) und B. Pascal (1623–1662); die Entdeckung der mathematischen Induktion durch Pascal, die Entdeckung der

[42] Eine Beschreibung dieser Methode kann man z.B. in einem Brief von FERMAT entnehmen, der in [3] abgedruckt ist.

[43] Die Randnotiz in seinem Exemplar von DIOPHANTs Buch: „Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi, hanc marginis exiguitas non caperet." ist sehr bekannt geworden. Die Ausschreibung des Wolfskehl-Preis führte zu einer Flut von [ungenügenden] Beweisversuchen für diese Vermutung.

[44] Man vgl. auch die *13 Lectures on Fermat's Last Theorem* von P. RIBENBOIM, [48], und EDWARDS' Monographie [18].

[45] Zum Leben und Wirken von PAUL WOLFSKEHL und zur Geschichte des Wolfskehl–Preises vgl. man K. BARNERs Artikel [4].

[46] Man vgl. z.B. GERHARD FREY, *Über A. Wiles' Beweis der Fermatschen Vermutung*, Math. Semesterberichte **40**, 177–191 (1993). Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise findet man in [62].

Infinitesimalrechnung durch I. Newton (1642–1727) und G. W. Leibniz (1646–1716). Mit diesen Ergebnissen verglichen, erscheinen die Ergebnisse der mathematischen Forschung vom Mittelalter bis zum 16. Jahrhundert dürftig. . . .

Vor Galileo hat Tycho Brahe (1546–1601) genaue Aufzeichnungen über astronomische Beobachtungen geführt. J. Kepler (1571–1630), durch einen mystischen Glauben in die 'Harmonie des Universums' motiviert, studierte Brahe's Aufzeichnungen und entdeckte drei Gesetze über die Bewegung der Planeten. Er behandelte auch ein Problem der Volumberechnung von Weinfässern (Kepler'sche Faßregel). Seine Zeitgenossen J. Napier (1550 – 1617) und J. Bürgi (1552–1632) entdeckten die Logarithmen, die den Astronomen enorm bei ihren Berechnungen halfen. In seiner Einführung der Logarithmen benutzte Napier den Begriff der Geschwindigkeit – die Analysis keimte. Galileo begründete den modernen Zugang zu Geschwindigkeit und Beschleunigung (1638, Dialog über zwei neue Wissenschaften). Mit einem selbstgebastelten Teleskop fand er vier Jupiter–Monde und beobachtete Sonnenflecken. Er vertrat die heliozentrische Theorie von Kopernikus (1473–1543) – was ihn vor die Inquistion brachte. Ihm wurde auferlegt, seine Theorie nicht weiter zu vertreten oder zu verteidigen. Dies ist die berühmteste Episode seines Lebens, aber seine bedeutendsten Beiträge zur Naturwissenschaft bestehen in der Begründung der Theoretischen Mechanik, die er von der Aristotelischen Tradition befreite und damit den Weg für Newton frei machte.
F. Cavalieri (1598–1647), ein Schüler von Galileo, wandte den Begriff der Indivisiblen, der aus der scholastischen Philosophie kam, in seiner Geometrie der Indivisiblen, 1635, auf Quadraturfragen an. Diese Ideen beeinflußten Pascal und J. Wallis (1616 – 1703).

Descartes begründete die Methoden der analytischen Geometrie in seiner Geometrie, 1637. Die Benützung von Koordinaten kann bis Apollonius von Perga zurückverfolgt werden. Auch Fermat benutzte sie gelegentlich, aber Descartes stellte die Methode die Beschreibung geometrischer Figuren mit Hilfe von Gleichungen das erste Mal klar dar; dies war ein wesentlicher Schritt über die griechische Geometrie hinaus. Er ging ebenfalls über F. Vieta (1540–1603) hinaus, indem er die Einschränkung aufgab, daß Größen, die durch Buchstaben dargestellt werden, eindimensional sein müssen.

Als Zeitgenosse von Descartes machte Fermat bemerkenswerte Beiträge zur Zahlentheorie, und Pascal zur projektiven Geometrie; durch ihre Korrespondenz begann die Wahrscheinlichkeitstheorie. Beide gaben auch Beiträge zur Analysis. Fermat behandelte Maxima und Minima von Funktionen und Tangenten an Kurven; Pascal antwortete auf seine Probleme bzgl. Tangenten, Schwerpunkt, Quadratur, Kubatur. Pascal trug zur Hydrostatik bei, benützte den unendlich fernen Punkt in der projektiven Geometrie, und formulierte das Prinzip der mathematischen Induktion in seiner Theorie der arithmetischen Dreiecke.

In England stehen Wallis und I. Barrow (1630–1677) vor Newton. Wallis löste Probleme der Quadratur und Kubatur durch kühne Verwendung von Cavalierischen Methoden, unendliche Reihen und Interpolation. Barrow war der Lehrer von Newton. Er kam nahe an den Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung heran, und Newton hat mit Sicherheit einige seiner Ideen den Vorschlägen von Barrow zu verdanken.

. . . Leibniz entdeckte die Infinitesimalrechnung etwas später als Newton, aber unabhängig. Er erfand bequeme neue Symbole, die der Entwicklung der Analysis sehr

förderlich waren: die Symbole dx und ∫ gehen auf ihn zurück. Leibniz war 1672–1677 in Paris, wo er Pater Arnauld (1612–1694) kennenlernte (zu dessem Kloster gehörte auch Pascal), und auch den niederländischen Physiker C. Huygens (1629–1695). Durch deren Anregung studierte er Descartes und Pascal. Die ersten Arbeiten zur Analysis von Leibniz wurden in Acta Eruditorum 1684 veröffentlicht.[47] *Die Methoden der Analysis wurden den Bernoullis und Euler übermittelt, die dann diese zur heutigen Differential– und Integralrechnung weiterentwickelten.*

Somit ging die Mathematik des 17. Jahrhunderts deutlich über die griechische Mathematik hinaus. Die Mathematiker zögerten nicht mehr, das Unendliche zu benützen. Und es wurde ihnen die Wichtigkeit experimenteller Methoden in den Naturwissenschaften deutlich. Die Stellung der Mathematik als wichtige Methodik für die Naturwissenschaften wurde begründet. Mathematik wurde die rationale Basis der naturwissenschaftlichen Forschung.

Verlassen wir nun das 17. Jahrhundert und sehen, mit welchen neuen Ideen und Ergebnissen das 18. Jahrhundert die Zahlentheorie bereicherte.

3 Euler, Lagrange, Legendre

„In the rapid development of mathematics during the eighteenth century the leading part was taken, not by the universities, but by the academies. Particularly prominent were the academies at Berlin and Petrograd. This fact is the more singular, because at that time Germany and Russia did not produce great mathematicians. The academies received their adornment mainly from the Swiss and French … “ ([14], p. 231).

3.1 L. Euler, 1707 – 1783

Als Sohn des Pfarrers Paul Euler in Richen bei Basel wurde Leonhard Euler am 15. April 1707 geboren. An der Universität Basel studierte er ab 1720 Philosophie, ab 1723 Theologie. Johann Bernoulli (1667–1748) brachte ihn zur Mathematik; mit 19 Jahren schrieb er eine Dissertation über die Bemastung von Schiffen. Bernoullis Söhne Daniel (1700–1782) und Nikolaus (1695–1726) gingen 1725 nach St. Petersburg und veranlaßten Katharina I. (1648–1727, Zarin seit 1724/25), auch Euler nach Petersburg einzuladen (1727). Er wurde dort 1733 Professor für Mathematik. 1741 folgte er einem Ruf Friedrichs des Großen (1712–1786) an die Berliner Akademie. Nach Differenzen mit dem preußischen König kehrte er auf Einladung der Kaiserin Katharina (II.) der Großen (1729–1796, Zarin seit 1762) nach St. Petersburg zurück.[48] Trotz seiner Erblindung im Jahre 1771 blieb Euler von ungeheurer Schaffenskraft. Die Herausgabe seiner Gesammelten Werke ist bis heute nicht abgeschlossen.
Euler kann als *„Begründer des modernen Lehrbuchs gelten, das systematisch von einfachen Grundlagen bis an die Front der Forschung führt. Er schrieb u. a. Bücher*

[47]Newton entdeckte die Analysis 1669–1671, aber seine Methoden wurden erst nach seinem Tode 1736 veröffentlicht.

[48]Ausführlichere Angaben findet man bei [70], p. 169 ff.

über Mathematik, Variationsrechnung, eine Einführung in die Analysis des Unendlichen, ein Werk über Differentialrechnung, eine dreibändige Integralrechnung und eine Einführung in die Algebra.“ ([32], p. 140).
EULER erbrachte bedeutende Beiträge – wie auch oft an der Namensgebung ersichtlich ist – zu folgenden Gebieten:

- ▷ Physik: Mechanik (Drehimpuls, Kreiseltheorie), schwingende Saite, Astronomie, Geodäsie, Kartographie, Ballistik, Optik, Theorie der Turbinen.
- ▷ Analysis: Funktionsbegriff, Potenzreihen, unendliche Reihen (auch Rechnungen mit divergenten Reihen[49]), EULER–MOIVREsche Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, unendliche Produkte („Eulerprodukte“) und Partialbruchzerlegungen. Einführung neuer Klassen von Funktionen, wie Gamma–Funktion, Beta–Funktion, Zylinderfunktionen.[50] Der Lösungsansatz $e^{\lambda x}$ für homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten wird benutzt. Die EULER-MACLAURINsche Summenformel verbindet Analysis, Numerik und Zahlentheorie.
- ▷ Variationsrechnung: Die EULERsche Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial x} F_{y'} - F_y = 0$ ist notwendig dafür, daß $\int_a^b F(x, y, y')dx$ ein Extremum hat.
- ▷ Algebra: Der Fundamentalsatz der Algebra wird formuliert, aber nicht bewiesen.
- ▷ Geometrie/Topologie: EULERsche Polyederformel $F - K + E = 2$ und Lösung des Königsberger Brückenproblems.

In der Zahlentheorie[51] gibt EULER viele wichtige Beweise; aufgrund seiner analytischen Neigungen und Kenntnisse führt er [analytische] Funktionen in die Zahlentheorie ein, wie die erzeugende Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) \cdot x^n = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^m}$$

für die Partitionenfunktion $p(n)$, die Anzahl der Darstellungen von n als Summe positiver Summanden. So kann EULER z. B.

$$(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{\frac{1}{2}n(3n+1)},$$

[49]Man vgl. hierzu HARDYs Buch über Divergent Series, [23]. Dort wird auch EULERs heute nicht mehr akzeptabler Stil seiner Beweise am Beispiel der Berechnung der Werte $\zeta(2k)$ vorgestellt.

[50]Parabolische Zylinderfunktionen sind Lösungen der Differentialgleichungen

$$y'' + (\frac{1}{4}x^2 + a)y = 0 \text{ bzw. } y'' - (\frac{1}{4}x^2 + a)y = 0.$$

[51]Die EULERschen Leistungen in der Zahlentheorie wurden besonders ausführlich von A. WEIL ([70], p. 184) gewürdigt. Man vgl. auch [53], p. 17–37.

beweisen, einen Spezialfall der JACOBIschen Identität

$$\prod_{1}^{\infty}\left\{(1-x^{2n})(1+x^{2n-1}\cdot z^2)(1+x^{2n-1}\cdot z^{-2})\right\}=\sum_{-\infty}^{\infty}x^{n^2}\cdot z^{2n}.$$

EULER betrachtet auch Partitionen in *ungerade* Summanden und in *verschiedene* Summanden. Die durch

$$\frac{x}{e^x-1}=B_0+\frac{B_1}{1!}\cdot x+\frac{B_2}{2!}\cdot x^2+\ldots$$

definierten BERNOULLIschen Zahlen werden bis zum Index 30 berechnet. Die Zetafunktion

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

wird für reelle Argumente betrachtet. Die Divergenz der Reihe $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$ gibt einen neuen Beweis der Unendlichkeit der Menge der Primzahlen. Die Werte der Zetafunktion an geraden natürlichen Zahlen werden mit Hilfe der BERNOULLIschen Zahlen ausgedrückt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}\cdot\pi^{2k}\cdot|B_{2k}|.$$

EULER kannte schon 1749, also 100 Jahre vor RIEMANNs berühmter Abhandlung, die Funktionalgleichung der Zetafunktion (in einer äquivalenten Form für $L(s)=1^{-s}-3^{-s}+s^{-s}+-\ldots$). Der „Beweis" erfolgt durch Verifikation für ganze s und für $s=\frac{1}{2}$ und $s=\frac{3}{2}$ und kühne Rechnungen mit divergenten Reihen.[52,53] In der elementaren Zahlentheorie beweist EULER den kleinen FERMATschen Satz und verallgemeinert ihn mit Hilfe der EULERschen φ-Funktion zu

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1 \bmod m,\ \text{wenn } \mathrm{ggT}(a,m)=1.$$

1772 zeigt er, daß es $\varphi(p-1)$ primitive Kongruenzwurzeln modulo p gibt.[54]
Das quadratische Reziprozitätsgesetz kann EULER erraten, aber nicht beweisen.
Er entdeckt, daß das quadratische Polynom x^2+x+41 für $x=0,1,\ldots,39$ Primzahlen darstellt — später wurde gezeigt, daß dies damit zusammenhängt, daß der quadratische Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{-163})$ die Klassenzahl 1 hat.

EULER zeigte, daß die Fermatzahl F_5 keine Primzahl ist; sie läßt sich auf zwei Arten als Summe von zwei Quadraten darstellen,

$$F_5=(2^{16})^2+1^2=62264^2+20449^2.$$

Um zu testen, ob eine („große") natürliche Zahl eine Primzahl ist, benutzte EULER eine Liste $\mathcal{N}$ von 65 „numeri idonei" zwischen 1 und 1848 mit der Eigenschaft, daß

[52] Man vgl. hierzu G. H. HARDY, *Divergent Series*, Oxford 1949, p. 22–26. LANDAU untersucht in der Arbeit *Euler und die Funktionalgleichung der Zetafunktion*, Bibliotheca Math (3) **7**, 69 – 79, 1906, sehr genau EULERs Beitrag.

[53] Man vgl. auch R. AYOUB, *Euler and the Zeta Function*, Amer. Math. Monthly 81, 1067–1086, 1974.

[54] [70], p. 184.

eine ungerade, zu $\mu \cdot v \in \mathcal{N}$ teilerfremde Zahl n eine Primzahl ist, wenn sie auf genau eine Weise als $n = \mu \cdot a^2 + \nu \cdot b^2$ darstellbar ist, wobei $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ ist.
Außer quadratischen diophantischen Gleichungen studiert EULER auch die Fermatgleichung $x^n + y^n = z^n$ und „zeigt", daß diese für $n = 3$ [nichttrivial] unlösbar ist.[55]
Die EULERsche Kettenbruchentwicklung für e zeigt, daß e und e^2 irrational sind.[56] Für eine gründliche, ausführliche Beschreibung EULERscher zahlentheoretischer Ergebnisse verweisen wir auf [70].

3.2 Lagrange, 1736 – 1813

JOSEPH LOUIS LAGRANGE, * 25. 1. 1736 in Turin, † 10. 4. 1813, Paris, war als Mathematiker, Physiker und Astronom tätig. 1755 erhielt LAGRANGE eine Stelle als Lehrer für Mathematik und Mechanik an der Artillerieschule in Turin. Auf EULERs Empfehlung wurde LAGRANGE 1766 von Friedrich dem Großen an die Berliner Akademie berufen. Nach des Königs Tod ging LAGRANGE 1787 nach Paris. Mit Auszeichnungen Napoleons überhäuft, starb er 1813, ohne die Revision der “Mécanique Analytique” zu Ende gebracht zu haben. LAGRANGE wurde im Pantheon beigesetzt. Es wäre schön, wenn in Deutschland herausragende Mathematiker und Naturwissenschaftler in ähnlicher Weise geehrt würden.

LAGRANGE gilt als bedeutendster Mathematiker des 18. Jahrhunderts nach EULER. Er befaßte sich mit

- ▷ Extremalproblemen mit Nebenbedingungen (LAGRANGEscher Multiplikator);
- ▷ Variationsrechnung im Anschluß an EULER, Lösung des isoperimetrischen Problems;
- ▷ LAGRANGEsches Restglied in der Taylorentwicklung;
- ▷ Variation der Konstanten bei linearen Differentialgleichungen;
- ▷ Partielle Differentialgleichungen in der Physik: Schallausbreitung, schwingende Saite;
- ▷ In der Astronomie gewinnt LAGRANGE 1764 den Preis der Französischen Akademie der Wissenschaften für die Lösung einer Preisaufgabe zur Bewegung des Mondes. Später bearbeitet er ein Sechskörperproblem der Bewegung des Jupiters und seiner vier großen Monde. Die Verbindung von Mechanik und Analysis ist für das gesamte 18. Jahrhundert charakteristisch.

[55]Nach EDWARDS [18] ist hierzu zu bemerken: *„There is a conflicting terminology in the histories of Fermat's Last Theorem as to whether Euler proved the case $n = 3$. The most common statement is that Euler did give a proof of the case $n = 3$ of Fermat's Last Theorem but that his proof was „'incomplete"' in an important respect. This is as close as one can come to the truth of the matter in a few words. The full story is more complex. . . . „*

[56]Die Irrationalität von π wurde durch J. H. LAMBERT (* 1728, Mühlhausen im Elsaß, † 1777 Berlin) bewiesen.

In der Zahlentheorie kann LAGRANGE[57] als direkter Nachfolger von FERMAT betrachtet werden, der eine ganze Reihe FERMATscher Behauptungen beweist:
1770 zeigt LAGRANGE erstmalig den Satz, daß jede natürliche Zahl eine Summe von 4 Quadraten ist. 1771 wird sein Beweis des WILSONschen Satzes $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$ veröffentlicht. LAGRANGE entwickelt die Theorie der Kettenbrüche weiter und zeigt, daß die Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalitäten $a + b \cdot \sqrt{D}$ periodisch ist.

Die „Pell"sche Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$ wird 1768 gründlich studiert. LAGRANGE beweist die Unlösbarkeit der Fermatgleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n = 4$ (1772).

Wichtige Ergebnisse erhält LAGRANGE zur Theorie der binären quadratischen Formen.% [58]

Es wird ein Äquivalenzbegriff zwischen quadratischen Formen $aX^2 + bXY + cY^2$ eingeführt (*„Formen, die ineinander transformiert werden können"*). Eine Form läßt sich in eine äquivalente Form („reduzierte Form") $AX^2 + BXY + CY^2$ transformieren, die $|B| \leq |A|$ und $|B| \leq |C|$ erfüllt. Er findet ein Verfahren, um alle reduzierten Formen zu erhalten, die zu einer gegebenen Form äquivalent sind. Es gibt nur endlich viele Äquivalenzklassen positiv definiter quadratischer Formen gegebener Diskriminante. Als Anwendungen ergeben sich Sätze über die Darstellbarkeit von Primzahlen durch gewisse positiv definite quadratische Formen.

3.3 Legendre, 1752 – 1833

ADRIEN–MARIE LEGENDRE, * 18. 9. 1752 in Paris, † 9. 1. 1833 in Paris.[59] Die Ausbildung erfolgte in Paris. Er lehrte 1775 – 1780 Mathematik an der École Militaire, und wurde später Professor an der École Normale. Er gewann 1782 den Preis der Berliner Akademie mit einer ballistischen Untersuchung. Während der Zeit der französischen Revolution hatte er Schwierigkeiten, sich durchzuschlagen. 1791 und ab 1794 gehörte er dem Ausschuß an, der schließlich das metrische System begründete.[60] LEGENDRE arbeitete insbesondere über

▷ Himmelsmechanik (LEGENDREsche Polynome, 1783),

▷ Variationsrechnung,

▷ Geodäsie und Ausgleichsrechnung,

[57] [53], p.39.

[58] Man vgl. insbesondere SCHARLAU – OPOLKA [53]. Wir zitieren (p. 39). *„Für uns ist insbesondere diese dritte Arbeit von Bedeutung, denn hier wird . . . zum erstenmal eine ganze zahlentheoretische Theorie zusammenhängend und systematisch entwickelt. Dies ist ein Schritt, dessen Bedeutung für die weitere Entwicklung der Zahlentheorie und Algebra kaum überschätzt werden kann.* GAUSS *hat etwa 25 Jahre später die Theorie der binären quadratischen Formen ganz wesentlich erweitert und vertieft. . . . "*

[59] Man vgl. auch hier [70], p. 336 ff.

[60] [70], p. 338.

- ▷ Grundlagen der Geometrie,[61]
- ▷ Elliptische Integrale[62] und
- ▷ Zahlentheorie.

In der Zahlentheorie führt er für $p \nmid a$ das „Legendre-Symbol“

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } a \text{ quadratischer Rest modulo } p \text{ ist,} \\ -1, & \text{wenn } a \text{ quadratischer Nichtrest modulo } p \text{ ist,} \end{cases}$$

ein und formuliert das quadratische Reziprozitätsgesetz. LEGENDREs Beweis für dieses Gesetz ist lückenhaft, weil er verwendet, daß es unendlich viele Primzahlen in der arithmetischen Progression gibt — ein Ergebnis, das erst DIRICHLET 1837 beweisen konnte. Er vermutet die Asymptotik für die Funktion $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$ in der [in zweiter Näherung nicht mehr ganz zutreffenden] Form

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x - 1.08366}.$$

1798 veröffentlichte LEGENDRE unter dem Titel *Essai sur la théorie des nombres* den Versuch, umfassend den [damaligen] Kenntnisstand der Zahlentheorie darzustellen.[63] Das einflußreiche Werk erlebte eine zweite Auflage 1808, und eine endgültige [zweibändige] Ausgabe “Théorie des Nombres” 1830; diese Ausgabe war jedoch dann durch GAUSSens `Disquisitiones arithmeticae` überholt.

3.4 Mathematik im 18. Jahrhundert

Wiederum aus dem Encyclopedic Dictionary ([19]) entnehmen wir die Zusammenfassung *Mathematik im 18. Jahrhundert* (in freier Übersetzung).

Während der Aufklärung entwickelte sich die mathematische Analysis stetig nach ihrem Beginn im 17. Jahrhundert. Die Analysis fand zahlreiche Anwendungen in der Theoretischen Physik und trug zum Erstarken der rationalen Denkweise bei.
Die zentralen Personen in der Mathematik des späten 17-ten und frühen 18–ten Jahrhunderts waren I. Newton (1642–1727) und G. W. Leibniz (1646–1716). C. Mauclaurin (1698–1746) folgte Newton, aber in Großbritannien gab es keinen Mathematiker von Newtons Größe. Ein unglücklicher Streit über die Priorität bei der Entdeckung der Infinitesimalrechnung entstand zwischen Newton und Leibniz, was auch ihre Nachfolger in Konflikte brachte. Dies verhinderte, daß die Mitglieder der englischen Schule ihre unbequeme Notation aufgaben, und dies behinderte ihren Fortschritt in der Analysis.

[61] Die “Élements de Géométrie”, 1794, enthalten auch einen Beweis der Irrationalität von π und von π^2. LEGENDREs Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen, waren nicht erfolgreich; er zeigte immerhin, daß die Summe der Winkel im Dreieck, auch ohne das Parallelenaxiom, stets $\leq \pi$ ist.

[62] LEGENDREs Darstellung wurde bald durch N. ABEL und C. G. J. JACOBI überholt.

[63] “Je le donne non comme un traité complet, mais simplement comme un essai qui fera connoître à-peu-près l'état actuel de la science.”

Auf dem Kontinent folgten Leibniz die Mitglieder der Bernoulli – Familie[64] *und L. Euler (1707–1783), die scharfsinnige Weiterentwicklungen der Analysis und ihrer Anwendungen brachten. Sie lösten verschiedene Differentialgleichungen und erfanden die Variationsrechnung. François Viète (Vieta, 1540–1603) hatte noch den Begriff* `Analysis` *als eine heuristische Methode betrachtet; in Newtons Sprachgebrauch bedeutete der Begriff die algebraische Manipulation von unendlichen Reihen. Erst im 18. Jahrhundert sicherte sich die Analysis ihre Position als ein von Algebra und Geometrie unabhängiger Zweig der Mathematik.*
Die analytische Dynamik, d.h. die Behandlung der Mechanik mit Methoden der Analysis, begründet von Euler, wurde durch J. L. Lagrange (1736–1813) und P. S. de Laplace (1749–1827) weiterentwickelt. Laplace systematisierte die Himmelsmechanik und die Wahrscheinlichkeitstheorie und zeigte dabei, welch mächtiges Werkzeug die Analysis darstellte. A. M. Legendre (1752–1833) untersuchte elliptische Integrale, d.h. Integrale der folgenden drei Arten:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \int \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\, dz, \int \frac{dz}{(1-a^2z^2)\cdot\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

und bahnte damit den Weg für C. F. Gauss *und andere Mathematiker des nächsten Jahrhunderts.*
Das Erstarken der École Polytechnique, die während der Zeit der französischen Revolution errichtet worden war, trug zum enormen Fortschritt der französischen Mathematik bei. Lagrange, Laplace und Legendre waren alle während dieser Zeit in Paris aktiv, ebenso wie S. D. Poisson (1781–1840) und J. B. J. Fourier (1768–1830); beide erbrachten gewichtige Beiträge zur Analysis. Ebenso waren auch G. Monge (1746–1818), L. Carnot (1753–1823) und J. V. Poncelet (1788–1867) in Paris aktiv. Ein von Fourier vorgeschlagenes Problem in seiner Theorie der Wärmeleitung gab Anlaß für wichtige Fragestellungen der Analysis, die später die Grundlage der harmonischen Analysis bildete. Fourier und Poisson strebten danach, die Naturgesetze zu erfassen, während Monge, Carnot und Poncelet die projektive Geometrie aus rein geometrischem Interesse entwickelten. Monge befaßte sich auch mit vorbereitenden Arbeiten zur Differentialgeometrie.
Die Mathematik des 18. Jahrhunderts brachte viele bemerkenswerte Ergebnisse in Geometrie und Analysis und deren Anwendungen; allerdings waren die Methoden die vom vorigen Jahrhundert ererbten und ließen kritische Überprüfung vermissen. Die Mathematiker waren mehr daran interessiert, neue Ergebnisse zu erhalten, und weniger daran, über die Strenge der verwendeten Methoden nachzudenken. Die Überprüfung und strenge Fundierung der Grundlagen der Mathematik wurden dem 19. Jahrhundert überlassen.

[64] Jakob, 1654–1705, Jakob, 1759–1789, Johann, 1667–1748, Johann, 1710–1790, Johann, 1744–1807, Nikolaus, 1695–1726, Daniel, 1700–1782. Man vgl. [32].

4 C. F. Gauss, 1777 – 1855

Carl Friedrich Gauss wurde am 30.4.1777 in Braunschweig geboren und verstarb am 23.02.1855 (knapp 78–jährig) in Göttingen. Er entstammte einer recht armen Familie und lebte zeitlebens in bescheidenen Verhältnissen.[65]
Gauss war Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker. Seine Werke wurden von der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen herausgegeben:

1. Disquisitiones Arithmeticae,
2. Höhere Arithmetik,
3. Analysis,
4. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie,
5. Mathematische Physik,
6. Astronomische Abhandlungen,
7. Theoretische Astronomie,
8. Nachträge zu Band 1 -- 4,
9. Geodäsie,
10. Nachträge zur Reinen Mathematik, Tagebuch,
11. Nachträge zur Physik.[66]

Gaussens Begabung wurde durch verständnisvolle Lehrer erkannt,[67] die ihm finanzielle Unterstützung durch den Herzog von Braunschweig verschafften. Gauss studierte 1792 – 1795 am Collegium Carolinum, dem Vorläufer der TH Braunschweig, und 1795 – 1798 in Göttingen. Erst dort hatte er sich zur Mathematik entschlossen.[68] Vom Herzog weiterhin durch ein Stipendium finanziell unterstützt, nahm Gauss erst nach des Herzogs Tod eine Berufung als Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte an der Universität Göttingen an (ab 1807). Trotzdem lebte er in bescheidenen finanziellen Verhältnissen, die Familie hatte wenig Verständnis für seine immense mathematische Arbeit, die ihn von anderen Dingen abhielt. Viele seiner bedeutendsten Entdeckungen, insbesondere die Entdeckung der `nichteuklidischen Geometrie`, blieben in der Schublade, andererseits reklamierte er aber immer wieder gegenüber anderen Mathematikern seine Priorität. Mit zunehmendem Alter galt er als immer unzugänglicher und unnahbarer. Er hatte kaum Schüler und mied Kontakte, wo es nur möglich war.

---

[65] Eine Fülle von Literaturhinweisen zu Gauss gibt [53], p. 124. In F. Kleins geschichtlichen Vorlesungen [33] ist das ganze 1. Kapitel, p. 6–62, dem Wirken von Gauss gewidmet.

[66] `Essais` über den wissenschaftlichen Nachlaß enthalten die Bände 10.2 und 11.2.

[67] Die Anekdote, daß Gauss mit der Lösung $\sum_{n=1}^{100} n = (1+100) + (2+99) + \ldots + (50+51)$ in der Grundschule seinen Lehrer verblüffte, wird oft erzählt.

[68] 1796 fand Gauss, daß das reguläre Siebzehn–eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

Seine erste Ehe mit Johanna Osthoff dauerte nur von 1805 – 1809, seine Frau starb bei der Geburt des zweiten Kindes. Diesen Schlag scheint Gauss nicht überwunden zu haben, seine zweite Ehe mit Minna Waldeck wurde nicht sonderlich glücklich.

Über seine mathematischen Entdeckungen ist man recht genau im Bilde, denn Gauss führte ein mathematisches Tagebuch, und zwar seit dem 30. 3. 1796. Dieses Tagebuch wurde Ende des 19. Jh. aufgefunden.
Am 29. 3. 1796, zu Beginn der Göttinger Studienzeit, löste Gauss ein seit Jahrtausenden offenes Problem: das regelmäßige 17–Eck ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar, und er konnte alle konstruierbaren regulären n–Ecke angeben.[69]
Die Dissertation an der Universität Halle (1799 bei J. F. Pfaff[70]) gab einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, die Promotion erfolgte in Helmstedt 'in absentia'.
Das zahlentheoretische Hauptwerk von Gauss sind die *disquisitiones arithmeticae*, 1801. Nach diesem Werk gehört Gauss zu den führenden Mathematikern seiner Zeit.[71]
In dieser bemerkenswerten Arbeit bewies Gauss Sätze, die den Anstrengungen von Euler, Lagrange und Legendre getrotzt hatten, und er legte die Grundlagen für völlig neue Theorien, die Modelle für die Mathematik des 19. Jahrhunderts wurden.
Behandelt werden

- der Kongruenzbegriff, lineare Kongruenzen, ein Beweis für die Existenz primitiver [Kongruenz–] Wurzeln modulo p,
- die Theorie der der quadratischen Reste mit dem quadratischen Reziprozitätsgesetz $\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$ (für ungerade Primzahlen $p \neq q$), wobei zwei verschiedene Beweise gegeben werden,[72]
- Quadratische Formen; Gauss schuf eine vollständige Theorie der binären quadratischen Formen[73] und begann ähnliche Konstruktionen für ternäre Formen.

[69]Heute benutzt man hierfür Galoistheorie. Die Zahl n muß aus einer Zweierpotenz und einem quadratfreien Produkt von Fermat–*Primzahlen* $F_r = 2^{2^r} + 1$ zusammengesetzt sein, d.h. in Frage kommen [derzeit] hierfür nur die Primzahlen 3, 5, 17, 257, 65537. – Gausssche Summen und Gausssche Perioden gehören zu dieser Entdeckung. Seine Verdienste wurden unlängst von staatlicher deutscher Seite gewürdigt: Gauss ist auf den 10–DM–Noten verewigt, ebenso auf einer Briefmarke der Deutschen Bundespost. Im April 1977 wurde eine 5–DM–Gedenkmünze herausgegeben.

[70]1765–1826.

[71]Aus [33], p. 26, sei zitiert: *In den* `Disquisitiones Arithmeticae` *schuf Gauß im eigentlichen Sinne die moderne Zahlentheorie und bestimmte bis zum heutigen Tage die ganze folgende Entwicklung. Unsere Bewunderung für diese Leistung muß noch wachsen, wenn wir beobachten, wie Gauß diese ganze Gedankenwelt ursprünglich rein aus sich selbst schafft, ohne irgendwelche äußere Anregung. ...*

[72]später hat Gauss noch weitere 6 Beweise geliefert.

[73]Gauss gab in den `disquisitiones arithmeticae` auch einen effizienten Algorithmus zur Gitterbasenreduktion für Gitter der Dimension 2 an. Die Untersuchungen wurden später von Hermite (1850), Korkin & Zolotarev (1872, 1873) und Minkowski (1891) auf Gitter beliebiger Dimension ausgedehnt. Ein wirklich effizienter Algorithmus zur Gitterbasenreduktion wurde erst 1982 von A. K. Lenstra, H. W. Lenstra & L Lovász (Math. Annalen, 261, 513 – 534) gegeben.

Zu diesem Algorithmus vgl. man auch die Darstellung bei E. Hlawka, J. Schoissengaier & R. Taschner, *Geometric and Analytic Number Theory*, Springer–Verlag 1991, Chapter **7**.

Gausss Ergebnisse zum Problem der dichtesten gitterförmigen Kugelpackung wurden schon in **2.3.3**

Die Klassen quadratischer Formen bilden eine abelsche Gruppe. Er schuf die Arithmetik quadratischer Zahlkörper, allerdings in der Sprache der quadratischen Formen. Z.B. folgte das Zerlegungsgesetz für Primzahlen in $\mathbb{Z}(i)$, den sogenannten Gauß'schen ganzen Zahlen; seine Interpretation der komplexen Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene ist wohlbekannt.[74] Schließlich gibt GAUSS Klassenzahlformeln für quadratische Zahlkörper mit gegebener Diskriminante.

- ▷ Kreistheilung (Gauss'sche Summen). Diese Theorie untersucht die Darstellbarkeit der Nullstellen der Gleichung $x^{p-1} = 1$ durch Ausdrücke, die nur mit Hilfe von Quadratwurzeln gebildet werden. Die Ergebnisse implizieren, daß reguläre p–Ecke (p prim) genau dann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können, wenn $p-1$ eine Zweierpotenz und damit p eine FERMATsche Primzahl ist.

Durch GAUSS wurde die Zahlentheorie zu einer selbständigen, systematisch geordneten Disziplin. Allerdings sind die `disquisitiones` nur schwer zu lesen, Motivation und Bedeutung der Ergebnisse werden unterdrückt zugunsten einer lückenlosen, strengen Deduktion. Erst durch DIRICHLETs Vorlesungen , die in die Problemstellung und Denkweise von GAUSS einführten, wurde dem Werk die gebührende Wirkung und Anerkennung zuteil.
Weitere wichtige Ergebnisse von GAUSS in anderen Gebieten der Mathematik betrafen:

- ▷ Der erste vollständige Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (ohne Verwendung komplexer Zahlen) wird gegeben. Dieser Beweis war 1797 gefunden worden; weitere Beweise veröffentlichte GAUSS 1815, 1816 (mit komplexen Zahlen), 1849 (aus Anlaß seines Goldenen Doktorjubiläums).

- ▷ Durch GAUSS erhielten die komplexen Zahlen Heimatrecht innerhalb der Mathematik (Gauss'sche Zahlenebene). Frühere Arbeiten von C. WESSEL (1792) und J. R. ARGAND (1806) waren unbeachtet geblieben. GAUSS verfügt über einen Zugang zur Theorie der elliptischen Funktionen – hat aber das Programm nicht weiter verfolgt. N. H. ABEL und C. G. J. JACOBI haben später die Theorie der elliptischen Funktionen entwickelt.

- ▷ GAUSS hatte, vor LOBATSCHEWSKI und BOLYAI, die Grundlagen der nichteuklidischen Geometrie entwickelt, aber nichts darüber veröffentlicht (abgesehen von einigen Briefen an Freunde): Das euklidische Parallelenpostulat ist von den anderen Axiomen der ebenen Geometrie unabhängig.

- ▷ GAUSS war, wie schon gesagt, Professor für Astronomie. Er entwickelte, gestützt auf seine Methode des Fehlerausgleichs nach der Methode der kleinsten Quadrate, vereinfachte Methoden der Bahnberechnung von Himmelskörpern und Methoden der Störungsrechnung. Die Bahn des Planetoiden CERES, von G. PIAZZI am

erwähnt.

Zur algorithmischen Theorie der Geometrie der Zahlen vgl. man L. LOVÁSZ, *An Algorithmic Theory of Graphs, Numbers and Convexity*, 1986.

[74]Die komplexen Zahlen wurden erst ab jener Zeit allmählich als legitime Objekte der Mathematik anerkannt.

1.1.1801 entdeckt, wurde von Gauss berechnet, und F. von Zach konnte ein Jahr später den Planetoiden nahe der von Gauss vorhergesagten Position wiederfinden. Gausssche Methoden bewährten sich auch bei den Planetoiden PALLAS, JUNO und VESTA. Die Arbeiten zur Astronomie erforderten höchste Rechenfertigkeit.

Mit seinem Namen sind die Gausssche Normalverteilung und die Gausssche Glockenkurve verknüpft. Fast „nebenbei" fielen Quadraturformeln für die numerische „Quadratur" (d. h. die numerische Berechnung bestimmter Integrale) an (1814).[75]

▷ Im Zusammenhang mit den astronomischen Berechnungen hatte Gauss auch erhebliche Beiträge zur Analysis geleistet, z.B. zum Konvergenzbegriff. Die hypergeometrische Reihe

$$F(a,b,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{(c)_n} \cdot z^n,$$

wobei $(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$ ist, wird gründlich studiert. Sie ist Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$z(1-z)w'' + (c-(1+a+b)z)w' - ab\,w = 0.$$

$F(a,b,c;z)$ und $z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c; z)$ bilden ein Fundamentalsystem der Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung, wenn c keine ganze Zahl ist. In der Funktionentheorie besaß Gauss den Cauchyschen Integralsatz (1825 veröffentlicht) bereits im Jahre 1811.

▷ Die Vermessung des Königreiches Hannover wurde 1820 angeordnet. Gauss leistete Enormes, z.B. bei der Organisation, den Messungen im Gelände, der Konstruktion von Vermessungsgeräten, und bei der wissenschaftlichen Auswertung. Grundlage war die Methode der kleinsten Quadrate.

▷ Gauss erbrachte wichtige Beiträge zur Differentialgeometrie (Gauss–Bonnetscher Integralsatz) und zur Potentialtheorie (Gausssches Variationsprinzip).

▷ In der Differentialgeometrie der Kurven und Flächen sind mit seinem Namen die Gausssche Krümmung und die Gauss–Bonnetsche Formel verbunden, in der Potentialtheorie das Gausssche Integral und das Gausssche Variationsproblem.

Das wissenschaftliche Werk von Gauss hat schon zu seinen Lebzeiten höchste Bewunderung erweckt, die in seinem Todesjahr geprägte Gedenkmünze bezeichnet ihn als „mathematicorum princeps", den Fürsten/König der Mathematiker. Zusammengefaßt sollte bemerkt werden, daß Gauss sowohl in der Angewandten Mathematik wie auch in der Reinen Mathematik Forschung von höchster Qualität betrieben hat. In seinen veröffentlichten Arbeiten strebte er nach äußerster Perfektion, so daß im Vergleich zum Umfang seiner Forschungstätigkeit nur „verhältnismäßig wenige" Arbeiten veröffentlicht wurden. Gauss wird allgemein als der größte Mathematiker der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts betrachtet.

[75] Nach [14], p. 491, wurde die Normalverteilung schon 1733 von de Moivre behandelt.

5 Beginn der Analytischen Zahlentheorie

5.1 Zeittafel

N. H. Abel	1802 – 1829
C. G. J. Jacobi	1804 – 1851
J. P. G. L. Dirichlet	1805 – 1859
P. L. Tschebyschew	1821 – 1894
F. G. M. Eisenstein	1823 – 1852
B. Riemann	1826 – 1866

Wir beginnen dieses Kapitel mit einer kurzen Beschreibung der Leistungen von Abel, obwohl für diesen die Kapitelüberschrift nur eingeschränkt zutrifft. Tschebyschews Wirken wird erst in **7.2** behandelt.

5.2 Abel, 1802 – 1829

Niels Hendrick Abel wurde am 5. August 1802 in Finhö in Norwegen als Sohn eines armen Pastors geboren. Er lebte, von Not und Mißerfolg niedergedrückt und TBC-krank, nur sehr kurz und starb am 6. April 1829 in Froland.[76]
Abels Werke liegen (seit 1881) in zwei Bänden vor, die Herausgeber waren die Norweger P. L. Sylow, 1832–1918, und Sophus Lie, 1842–1899.
Abel studierte (im wesentlichen als Autodidakt) an der Universität von Christiania (= Oslo, ab 1924). 1824 bewies er, daß die Gleichung 5. Grades i. a. nicht durch Radikale auflösbar ist. Dieser große Erfolg führte dazu, daß Abel – noch ohne Universitätsabschluß – von der norwegischen Regierung ein Stipendium für eine zweijährige Auslandsreise (nach Berlin und Paris) erhielt.[77]
Vom September 1825 bis Februar 1826 hielt sich Abel in Berlin auf. August Leopold Crelle[78] erkannte sein Genie und machte ihm zum Mitarbeiter des Crelle–Journals.[79]
Nach Berlin besuchte Abel noch Venedig und Paris.[80] Nach seiner Rückkehr nach Norwegen (über Berlin) lebt Abel in großer Armut und stirbt am 06.04.1829 — wenige Tage vor dem Eintreffen einer Berufung nach Berlin.

[76]Über die Einzelheiten seines Lebens hat die norwegische Regierung anläßlich des 100. Geburtstages 1902 ein `Mémorial` erstellt. Man vgl. insbesondere auch [33], p. 100 ff.

[77]F. Klein [33], p. 101, schreibt hierzu: *„Diese Reise ist für Abel von entscheidender Bedeutung gewesen; hier entstanden seine hauptsächlichsten Ideen, oder besser gesagt, durch die Berührung mit der ihm neu entgegentretenden mathematischen Umgebung wurde Abel gezwungen, ihnen Form zu geben, um sie durchzusetzen; etwa wie eine übersättigte Lösung durch die kleinste äußere Erschütterung plötzlich zur Kristallisation gebracht wird.“*

[78]1780–1855, Mathematiker und Wissenschaftsorganisator, mathematischer Fachreferent im preußischen Kultusministerium von 1828–1848, Gründer (1826) und erster Herausgeber des „Crelle-Journal“, korrekter: *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*.

[79]In Band 1 des Crelle–Journals finden sich 6 Arbeiten von Abel.

[80]Eine Annäherung an Cauchy war dort nicht möglich. Abels Manuskript über *“Mémoire sur une classe très étendue de fonctions transcendents”* wurde von Cauchy verschlampt und erst 1841 gedruckt, nach Intervention der norwegischen Regierung. Nach seinem Tode (1829) wurde Abel 1830 der große Preis der Pariser Akademie verliehen. Man vgl. Koenigsberger, L., *Zur Geschichte der elliptischen Transcendenten*, 1879.

Abels Arbeiten befassen sich insbesondere mit Fragen aus der Analysis und der Algebra.

- ▷ Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung 5. Grades durch Radikale.
- ▷ Abhandlung über die binomische Reihe, ein wichtiger Beitrag zur exakten Grundlegung der Analysis (Abelscher Stetigkeitssatz).[81]
- ▷ Elliptische Funktionen, als Umkehrfunktionen elliptischer Integrale, sind doppeltperiodisch.
- ▷ Das Abelsche Theorem ist eine weitreichende Verallgemeinerung des Additionstheorems elliptischer Integrale.

F. Klein [33], p. 106, charakterisiert Abel begeistert so: *„Abel bewältigt mit größter Genialität die allgemeinsten Probleme; die mathematische Idee ist das bei ihm wirksame Element; und zwar rein abstrakt ohne das Mittel geometrischer Anschauung. ... Abels Geist [hat] die Kraft, sich in die Lüfte zu erheben und in scheinbar mühelosem Flug, alles überschauend, noch allgemeineren Zielen zuzuschweben.“*

Eine ausführliche Würdigung von N. H. Abel wird in der Monographie [64] von A. Stubhaug, Univ. von Oslo, gegeben; diese liegt auch in deutscher Sprache vor (man sehe [65]).

5.3 Jacobi, 1804 – 1851

Carl Gustav Jacob Jacobi wurde am 10. 12. 1804 in Potsdam geboren; als Bankierssohn wuchs er in einem wohlhabenden Hause heran; er verstarb am 18. 2. 1851 in Berlin an Pocken. Nach dem Abitur (1821) begann er sein Studium in Berlin; mit der Mathematik beschäftigte er sich durch private Studien, z. B. von Eulers Werken. Nach Promotion und Habilitation im Jahre 1825 ging Jacobi ab Mai 1826 nach Königsberg, wo er als Dozent, Extraordinarius (1827) und Ordinarius (1831) wirkte. Das Jahr 1812 brachte die Emanzipation der Juden in Preußen. Jacobi ist der erste jüdische Mathematiker, der in Deutschland eine führende Stellung einnahm.[82]
1844 folgte Jacobi einem Ruf nach Berlin auf eine rein akademische Stellung ohne feste Lehrverpflichtung und wurde Mitglied der Akademie.
Jacobi arbeitete in freundschaftlichem Wettstreit mit Abel, voller Bewunderung für diesen, zunächst an ähnlichen Fragestellungen ([33], p. 106).[83]

[81] Ein fehlerhaftes Ergebnis von Cauchy, daß *eine konvergente Reihe stetiger Funktionen im Konvergenzintervall stetig sei*, wird richtiggestellt.

[82] F. Klein [33], schreibt: *Auch hiermit steht er [Jacobi] an der Spitze einer großen, für unsere Wissenschaft bedeutungsvollen Entwicklung. Es ist mit dieser Maßnahme ein neues großes Reservoir mathematischer Begabung für unser Land eröffnet, dessen Kräfte neben dem durch das Französische Emigrantentum gewonnen Zuschuß sich in unserer Wissenschaft bald als fruchtbar erweisen. Es scheint mir durch solch' eine Art Bluterneuerung eine starke Belebung der Wissenschaft gewonnen zu werden.* ...

[83] *„Jacobi läßt sich in seinen einzelnen Schritten zwar von der divinatorischen Kraft seiner Begabung leiten, gibt aber dem Eroberten sofort ein festes Gefüge durch seine virtuos gehandhabte, glänzende Rechenkunst.“*

- ▷ Elliptische Funktionen, deren Theorie vom analytischen Standpunkt aus entwickelt wurde.indexGauß[84]
- ▷ Studium der Thetareihen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{an^2+bn}$ und ihrer Identitäten, mehrfache Thetareihen.
- ▷ Anwendung der Thetareihen zum Beweis des LAGRANGEschen Vier-Quadrate-Satzes (dies kann, neben DIRICHLETs Errungenschaften, als ein Beginn der analytischen Zahlentheorie betrachtet werden).
- ▷ Diophantische Gleichungen, Kalkül der Jacobi-Summen, Reziprozitätsgesetz für kubische Reste.
- ▷ Ausdehnung des Teilbarkeitsbegriffs auf algebraische Zahlen.[85]
- ▷ Störungen der Planetenbahnen, analytische Mechanik, partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Variationsrechnung.
- ▷ Theorie der Determinanten, Trägheitsgesetz für quadratische Formen.
- ▷ Transformation mehrfacher Integrale.

„In seinen Forschungen und Vorlesungen hatte JACOBI *Aktivitäten entfaltet, die ihn zu einem der ideenreichsten und produktivsten Mathematiker, einem Reformator des mathematischen Universitäts–Unterrichts werden ließen. Das abgelegene Königsberg wurde zum Mittelpunkt einer Schule, die von großem Einfluß auch auf die anderen Universitäten geworden ist.*
Entgegen den Ansichten etwa von J. B. FOURIER*, der noch den Nützlichkeitsstandpunkt des 18. Jahrhunderts vertrat, sah* JACOBI *in der Erkenntnis allein das Endziel seiner Forschung. Er schloß sich der schon im 18. Jh. mehrfach und später auch von* K. MARX *(1818–1883), ausgesprochenen Meinung an, daß eine Wissenschaft erst dann wirklich entwickelt wäre, wenn sie dahin gelangt ist, sich der Mathematik bedienen zu können.“* [32], p. 299.

[84]In seiner enthusiastischen Heidelberger Rede vom 09. 08. 1904 auf JACOBI würdigt LEO KOENIGSBERGER das fundamentale Werk über elliptische Funktionen: *„Wenige Tage später [1829] erschienen die* `Fundamenta nova functionum ellipticarum` *von* JACOBI*, ein Werk, das sich den* GAUSS*schen* `disquisitiones arithmeticae` *würdig anreiht und das aller Augen auf deren Verfasser richten ließ – der 24jährige junge Mann stand unbestritten da als der erste deutsche Mathematiker nächst* GAUSS *. . . “* .

[85]Damit ergibt sich der Beginn der algebraischen Zahlentheorie; deren Hauptaufgabe, nach KUMMER, 1850, die Formulierung und der Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes ist – eine Aufgabe, die erst im 20. Jahrhundert mit der Klassenkörpertheorie gelöst werden konnte. Man vgl. auch **6.1**, 42.

5.4 Dirichlet, 1805 – 1859

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet wurde am 13. 2. 1805 in Düren bei Aachen geboren; er verstarb am 5. 5. 1859 in Göttingen (Herzinfarkt).[86]
Seine mathematische Ausbildung erfolgte in Paris 1822 – 1826, wo er als Hauslehrer wirkte. Dirichlet pflegte Kontakte mit J. Fourier (1768–1830), S. D. Poisson (1781–1840) und S. F. Lacroix (1765–1843). 1825 bewies er ein wichtiges Teilresultat für die Fermat–Vermutung für $n = 5$. A. M. Legendre hat diese Methode aufgegriffen und den Fall $n = 5$ vollständig erledigt.
1827 wurde Dirichlet Ehrendoktor der Universität Bonn. Gefördert durch Alexander von Humboldt (1769–1859) wurde Dirichlet 1827 Privatdozent und a.o. Prof. in Breslau. 1829 ging er als Privatdozent nach Berlin,[87] wurde dort 1831 a.o.Prof. und 1839 Ordinarius. Dirichlet heiratete Rebekka, eine der Schwestern von Felix Mendelssohn, und Frau Dirichlet sammelte in Göttingen wissenschaftlich und künstlerisch interessierte Geister um sich. Dirichlet selbst nahm an solchen geselligen Veranstaltungen nur sehr zurückhaltend teil.
1855 folgte er dem Ruf nach Göttingen als Nachfolger von C.F. Gauss. Mit großem Erfolg wirkte Dirichlet durch vorbildliche Vorlesungen über aktuelle und schwierige Fragen der Mathematik.[88] Z.B. wurden erst durch ihn Gaussens `Disquisitiones Arithmeticae` der mathematischen Allgemeinheit zugänglich und verständlich. Allerdings hielt Dirichlet seine Vorlesungen nur für einen Kreis von auserwählten Hörern; für die große Anzahl von Lehramtskandidaten waren seine Vorlesungen zu schwierig. Dirichlet war nie Mitglied der Prüfungskommission und hat sich nicht an der Leitung des Göttinger Mathematischen Seminars beteiligt.
Dirichlets Vorlesungen hatten großen Einfluß auf E. E. Kummer, G. Eisenstein, L. Kronecker, B. Riemann und R. Dedekind.
Dirichlet arbeitete über

- ▷ Fragen der Analysis (unendliche Reihen, bedingte Konvergenz, Änderung des Wertes unendlicher Reihen durch Umordnung, bestimmte Integrale),[89]
- ▷ Konvergenzbeweis für Fourierreihen von stückweise stetigen, monotonen Funktionen,
- ▷ Fragen der mathematischen Physik (Hydrodynamik, Mechanik; ein stabiles Gleichgewicht eines Punktsystems besteht, wenn die potentielle Energie ein isoliertes Minimum besitzt),
- ▷ Potentialtheorie, Lösung von Randwertaufgaben: man finde eine harmonische Funktion auf Ω, die auf $\partial\Omega$ gegebene stetige Randwerte annimmt; die Lösung

[86] Man vgl. [32], p. 127 f., und [33], p. 96 ff.
[87] Dort lehrte er auch an der Kriegsakademie und an der Bau–Akademie.
[88] In seiner Gedächtnisrede auf Dirichlet in Göttingen 1905 sagte Minkowski: *„Er besaß die Kunst, mit einem Minimum blinder Formeln ein Maximum sehender Gedanken zu verbinden.“* Diese Haltung nennt Minkowski *das wahre Dirichletsche Prinzip.*
[89] Die Dirichletsche Funktion $D(x) = 1$, wenn x rational, sonst $D(x) = 0$, ist als einfaches Beispiel einer nicht Riemann–integrierbaren Funktion aus Analysis I geläufig.

erfolgte mit Hilfe des DIRICHLETschen Prinzips: Die gesuchte Lösung ist die Funktion mit dem kleinsten Dirichlet–Integral.[90]

In der Zahlentheorie, die uns hier vor allem interessiert, hat sich DIRICHLET große Verdienste erworben durch die Einführung analytischer Hilfsmittel (DIRICHLET–Reihen, Fourierreihen) zur Lösung zahlentheoretischer Probleme. DIRICHLET studierte immer wieder die GAUSSschen `Disquisitiones Arithmeticae`; seine Vorlesungen darüber sicherten dieser GAUSSschen Monographie gebührendes Verständnis. Er erreichte gewichtige Ergebnisse.

- ▷ DIRICHLETscher Approximationssatz (ist $\alpha \notin \mathbb{Q}$, so hat $|\alpha - \frac{a}{q}| < \frac{1}{q^2}$ unendlich viele Lösungen in teilerfremden ganzen Zahlen a, q) und Schubfachprinzip.

- ▷ Vereinfachte Darstellung der `Disquisitiones Arithmeticae` in Vorlesungen. Berechnung der GAUSSschen Summe

$$G(m) = \sum_{0}^{m-1} \exp\left(2\pi i \frac{k^2}{m}\right)$$

  mit Hilfe der Theorie der Fourierreihen.[91]

- ▷ Die Einführung von „Dirichlet-Reihen“, d. h. Reihen der Gestalt $\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$.

- ▷ Nachweis der Existenz unendlich vieler Primzahlen in der arithmetischen Progression. Hierfür wurden DIRICHLET–Charaktere mod m verwendet, um Primzahlen in (primen) Restklassen auszusondern. Das Ergebnis hängt entscheidend an der Tatsache, daß die DIRICHLETschen L–Reihen

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

  für $\chi \neq \chi_0$ an der Stelle $s = 1$ keine Nullstelle besitzen. Der Nachweis, daß $L(1, \chi) \neq 0$ ist, erforderte einen großen Umweg über die Klassenzahlformeln der algebraischen Zahlentheorie (für quadratische Zahlkörper).

- ▷ Klassenzahlbestimmung für die Anzahl der Klassen binärer quadratischer Formen gegebener Determinante (das ist äquivalent zur Bestimmung der Klassenzahl h in quadratischen Zahlkörpern). Die Klassenzahlformel drückt die Klassenzahl h durch Körperkonstanten und ein Produkt der Werte von DIRICHLETschen L–Reihen an der Stelle $s = 1$ aus.

- ▷ Definition ganzer algebraischer Zahlen und Definition der Einheiten in algebraischen Zahlkörpern, und Ermittlung der Struktur der Einheitengruppe („DIRICHLETscher Einheitensatz“).

---

[90] Zum DIRICHLETschen Prinzip schreibt F. KLEIN, [33], p. 267. *„Das Schicksal des Dirichletschen Prinzips aber ist, wenn man es nachträglich überschaut, an sich sehr merkwürdig: von den älteren Mathematikern, besonders von Dirichlet, als vollgültiges Beweismittel benützt, ist es bei Riemann außerordentlich fruchtbar, wird von Weierstraß widerlegt und fällt für Jahrzehnte in Mißkredit, um neuerdings durch Hilbert wieder gerettet zu werden.“*

[91] Bekanntlich hat es GAUSS Jahrzehnte gekostet, das „Vorzeichen“ dieser Summe zu bestimmen.

5.5 Eisenstein, 1823 – 1852

Ganz kurz soll auch Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (16. 04. 1823 – 11. 10. 1852, Berlin) erwähnt werden. Der genial veranlagte Eisenstein lebte in ärmlichen Verhältnissen, war kränklich und litt zuletzt unter Verfolgungswahn.[92] Auf ihn gehen zurück

- ▷ die Eisensteinschen Reihen für elliptische Funktionen und Modulformen,
- ▷ Invarianten binärer kubischer Formen,
- ▷ Darstellung elliptischer Funktionen durch [bedingt konvergente] unendliche Produkte,
- ▷ Studium der Einheiten kubischer Körper,
- ▷ Beweis des kubischen Reziprozitätsgesetzes und des biquadratischen Reziprozitätsgsetzes,
- ▷ Klassenzahlformeln für ternäre quadratische Formen (der Beweis wurde erst durch V. A. Markov erbracht),
- ▷ Darstellung ganzer Zahlen als Summen von fünf Quadraten,
- ▷ Eisensteinsches Irreduzibilitätskriterium.

Gauss hat Eisenstein sehr geschätzt und gelobt. In [38], p. 175, wird A. Weils Entdeckung ([70]) erwähnt, daß Eisenstein (Datum 07. 04. 1849) einen [unveröffentlichten] Beweis für die Funktionalgleichung von $L(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - + \ldots$ besessen hat und damit vielleicht B. Riemann beeinflußt hat.

5.6 Riemann, 1826 – 1866

Bernhard Georg Friedrich Riemann wurde am 17. 9. 1826 als Kind einer Pfarrersfamilie in Breselenz bei Dannenberg geboren. Er starb am 20. 7. 1866 in Selasca am Lago Maggiore.[93]
1846 begann Riemann ein Studium der Theologie und Philosophie in Göttingen, wechselte aber bald zur Mathematik. In Berlin, 1847–1849, hörte er Vorlesungen bei J. Steiner, C. G. J. Jacobi, G. Eisenstein und P. G. L. Dirichlet. Der Letztgenannte übte besonderen Einfluß auf Riemann aus. 1849 kehrte er nach Göttingen zurück. Dort gewann Riemann in W. Weber[94] einen Gönner und väterlichen Freund.

Die Dissertation *„Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe“*, 1851, wurde von Gauss sehr positiv beurteilt. Holomorphe Funktionen werden durch die Gültigkeit der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen eingeführt. Weitreichende Zusammenhänge zwischen Funktionentheorie, Potentialtheorie und partiellen Differentialgleichungen werden erkannt. Der

[92] Nach [33], p. 248.
[93] Zu Riemann vgl. man insbesondere die ausführliche Monographie [38] von D. Laugwitz.
[94] Wilhelm Weber (1804–1891).

RIEMANNsche Abbildungssatz wird behandelt. Die Idee der „Riemann'schen Fläche“ entsteht, das Geschlecht p wird eingeführt. Diese Dissertation wurde die Grundlage für die geometrische Funktionentheorie.

Die Habilitationsschrift *„Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe“*, 1854, befaßt sich mit Fourierreihen, aber enthält auch die Definition des Riemann–Integrals.

Die Probevorlesung *„Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“* findet höchste Anerkennung. Die Möglichkeit der Existenz nichteuklidischer Geometrien wird untersucht. Im n–dimensionalen Raum wird die Metrik mittels quadratischer Differentialformen definiert. Der Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeiten wird eingeführt (differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit einer Riemannschen Metrik).

1857 systematisierte RIEMANN die Theorie der Abelschen Integrale und Abelschen Funktionen. Auf einer kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$ werden Integrale $\int_\gamma \omega$ betrachtet, wobei ω ein Abelsches Differential der ersten oder zweiten Art ist. Außerdem gibt er *„Beiträge zur Theorie der durch die* GAUSS*sche Reihe* $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ *darstellbaren Funktionen.*[95]

Zuletzt beschäftigte sich RIEMANN mit Fragen aus der Theoretischen Physik (*Fortpflanzung ebener Luftwellen ...*, und *Über eine Frage der Wärmeleitung*).

Für die Zahlentheorie ist die aus Anlaß der Wahl in die Berliner Akademie der Wissenschaften eingereichte Arbeit (1859)

Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

höchst bedeutsam. RIEMANN studierte hier die [Riemannsche] Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

als Funktion der *komplexen* Veränderlichen $s = \sigma + it$. Er bewies,

▷ daß $\zeta(s) - (s-1)^{-1}$ eine ganze Funktion ist,

▷ und daß $\zeta(s)$ die Funktionalgleichung

$$\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}s}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}(1-s)}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s)\right)\zeta(1-s)$$

erfüllt. Als Folgerung ergibt sich, daß die einzigen Nullstellen der Zetafunktion in $\Re(s) < 0$ die Pole von $\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)$ sind, d.h. die Punkte $-2, -4, -6, \ldots$.

RIEMANN stellte weiter mehrere bemerkenswerte Behauptungen auf — gestützt auf ein sicher vorhandenes enormes Hintergrundwissen, das z.B. C. L. SIEGEL 1932 in *Über Riemann's Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie* aufarbeitete. H. DAVENPORTschrieb in [15]:

[95] Diese Arbeiten *„haben wie Offenbarungen gewirkt und die rückhaltlose Bewunderung aller Fachgenossen erregt.“* (Nach [33], p. 252.)

> *There is very little indication of how Riemann was led to some of these conjectures. In 1932 Siegel published an asymptotic expansion for $\zeta(s)$, valid in the critical strip, which had its origin in notes of Riemann preserved in the Göttingen University Library. From Siegel's description of the notes, it is plain that Riemann had more knowledge about $\zeta(s)$ than is apparent from his published memoir; but there is no reason to think that he had proofs of any of his conjectures.*

Diese Behauptungen sind die folgenden:

- ▷ $\zeta(s)$ hat unendlich viele Nullstellen im kritischen Streifen $0 < \Re(s) < 1$. Diese liegen symmetrisch zur reellen Achse und zur Geraden $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

- ▷ Die Anzahl $N(T)$ der Nullstellen im kritischen Streifen mit $0 < t \leq T$ erfüllt

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \cdot \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + \mathcal{O}(\log T).$$

  Diese asymptotische Formel wurde durch von Mangoldt 1895, 1905 bewiesen.

- ▷ Die ganze Funktion

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1) \cdot \pi^{-\frac{1}{2}s} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) \cdot \zeta(s)$$

  hat die Produktdarstellung

$$\xi(s) = e^{A+Bs} \cdot \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \cdot e^{\frac{s}{\rho}},$$

  wobei ρ die Nullstellen der Zetafunktion im kritischen Streifen durchläuft. Dies wurde von J. Hadamard 1893 bewiesen und war entscheidende Grundlage der Beweise des Primzahlsatzes durch Hadamard und de la Vallée–Poussin. Hadamard hatte hierzu die Theorie ganzer Funktionen endlicher Wachstumsordnung entwickelt und für diese eine Verschärfung des Weierstrassschen Produktsatzes bewiesen.

- ▷ Es gibt eine explizite Formel für $\pi(x) - li(x)$. Für die Funktion

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n), \qquad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{wenn } n = p^k \text{ Primzahlpotenz,} \\ 0 & \text{andernfalls,} \end{cases}$$

  hat diese eine einfachere Gestalt und lautet:

$$\psi(x) - x = -\sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

  Diese explizite Formel wurde von von Mangoldt 1895 bewiesen.

  (In der Summe müssen die Terme mit ρ und $\bar{\rho}$ zusammen genommen werden, und für ganzes x muß in der Definition von $\psi(x)$ der letzte Summand durch $\frac{1}{2}\Lambda(x)$ ersetzt werden.)

- Die berühmte Riemannsche Vermutung über die nichttrivialen Nullstellen der Zetafunktion ist immer noch offen:

  Alle Nullstellen von $\zeta(s)$ im kritischen Streifen liegen auf $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

  1914 bewies G. H. Hardy, daß unendlich viele Nullstellen auf der kritischen Geraden liegen. 1942 zeigte A. Selberg, daß ein positiver [kleiner] Bruchteil aller Nullstellen auf der kritischen Geraden liegt, und 1975 Norman Levinson, daß mehr als $\frac{1}{3}$ aller Nullstellen auf $\Re(s) = \frac{1}{2}$ liegen. Die Konstante wurde noch geringfügig verbessert, auf etwas über 0.4. Den Weltrekord hält derzeit P. Bauer (Frankfurt a. Main) mit seiner Diplomarbeit.

Ab 1854 war Riemann Privatdozent, ab 1855 a.o. Prof., alles in Göttingen, und er wurde Nachfolger von Dirichlet nach dessen Tod 1859.
Nach einer Lungenentzündung 1862 konnte Riemann keinen vollständigen Vorlesungszyklus mehr halten. Er war wohl an Tuberkulose erkrankt. Auch drei Italienaufenthalte brachten keine Besserung.

6 Vertreter der Algebraischen Zahlentheorie

In diesem Kapitel sollen Vertreter der algebraischen Zahlentheorie im 19. Jahrhundert kurz besprochen werden, nämlich

E. E. Kummer	1810 – 1893,
L. Kronecker	1823 – 1891,
R. Dedekind	1831 – 1916.

Viel ausführlicher werden die Theorie der algebraischen Zahlentheorie und die Beiträge von Kummer, Kronecker, Dedekind und anderen im 2. Kapitel in [36] dargestellt.

6.1 Kummer, 1810–1893

Ernst Eduard Kummer, * 29. 1. 1810 zu Sorau (Schlesien), † 14. 5. 1893 in Berlin. Ab 1828 theologische, philosophische, dann hauptsächlich mathematische Studien an der Universität Halle; die Promotion erfolgte 1831.
Danach war Kummer Gymnasiallehrer in Sorau, 1832–1842, unterbrochen durch ein Jahr Militärdienst in Liegnitz. Ab 1842 war Kummer Professor in Breslau. 1855 wurde er Nachfolger von Dirichlet an der Berliner Universität (bis 1883).
Durch das Wirken von Kummer und K. Weierstrass[96] (ab 1856) wurde Berlin ein führendes Zentrum der Mathematik in Deutschland. Kummer war ein glänzender akademischer Lehrer, für seine Zeitgenossen *„die Idealgestalt eines Forschers und Gelehrten“.*
Er erbrachte wesentliche Beiträge zu folgenden Gebieten:

- Analysis: Spezielle Funktionen, deren Entwicklung in Potenzreihen und trigonometrische Reihen, Untersuchungen zur hypergeometrischen Reihe.

[96] Zu Weierstrass vgl. man z.B. den Artikel [11] von Reinhard Bölling.

- ▷ Geometrie: Beiträge zur allgemeinen Differentialgeometrie, Entdeckung der Kummerschen Fläche, einer Fläche 4. Ordnung.

- ▷ Zahlentheorie: Cubische Reste, Höhere Potenzreste, Höhere Reziprozitätsgsetze,[97] Kalkül der GAUSSschen und JACOBIschen Summen. KUMMER führt – vermutlich im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen der Fermatgleichung – den Begriff der *idealen Zahlen* in algebraischen Zahlkörpern ein. Damit wurde der Beweis der eindeutigen Zerlegbarkeit in *ideale Primzahlen* in Kreisteilungskörpern möglich. KUMMER studierte die Arithmetik dieser Körper und gab Klassenzahlformeln, untersuchte die Struktur der Klassengruppe und der Einheitsgruppe, und fand viele interessante Einzelergebnisse.

  DEDEKIND und KRONECKER dehnten diese Untersuchungen schließlich auf die Arithmetik beliebiger algebraischer Zahlkörper aus.

  Das Jahr 1847 brachte KUMMERs großen Beitrag in Richtung eines Beweises der FERMATschen Vermutung.[98] Die Fermatgleichung $x^p + y^p = z^p$ ist mit $x, y, z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ unlösbar, wenn p eine reguläre Primzahl ist. Alle Primzahlen unter 100 außer 37, 59 und 67 sind regulär.[99] Dieser enorme Fortschritt wurde möglich durch KUMMERs tiefgehende Untersuchung der Arithmetik von Kreisteilungskörpern.

6.2 Kronecker, 1823 – 1891

LEOPOLD KRONECKER, * 7. Dezember 1823 in Liegnitz (Schlesien), † 29. 12. 1891.[100],[101] Am Gymnasium in Liegnitz begeisterte ihn E. KUMMER, der dort als

[97]KUMMER formulierte und bewies das Reziprozitätsgesetz für Potenzreste mit gewissen primen Exponenten (ab 1858). — Zum „allgemeinen Reziprozitätsgesetz“ liest man bei NEUKIRCH, [44], p. 592 (mit $\zeta = \exp\left(2\pi i \cdot \frac{1}{n}\right)$): *„Nach langer, angestrengter Arbeit von neun Jahren, in denen er nicht nur die Idealtheorie des Kreisteilungskörpers $\mathbb{Q}(\zeta)$ entwickeln mußte, sondern auch die tiefliegenden, idealtheoretischen Gesetzmäßigkeiten im „Kummerschen“ Körper $\mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[n]{d})$, gelang es* KUMMER, *ein Reziprozitätsgesetz zu beweisen, das zwar nicht die volle Allgemeinheit besaß wie das quadratische, das aber wie eine Offenbarung auf die Mathematiker jener Zeit wirkte und eine unumschränkte Bewunderung auf sich zog. Dieses Reziprozitätsgesetz galt für je zwei zueinander „primäre“ Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}(\zeta)$ … und präsentierte sich in der bestechenden Form $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. Dabei mußte sich* KUMMER *allerdings mit dem Fall begnügen, daß der Exponent n eine* **reguläre Primzahl** *ist, eine Einschränkung, die er zunächst nicht als so einschränkend angesehen zu haben scheint, wie sich später erweisen sollte.“* — Man vgl. hierzu auch S. J. PATTERSON, [45], p. 632.

[98]Zu jener Zeit waren nur die Fälle $p = 3$ (EULER — mit einem „Beweis“, der heutigen Ansprüchen bei weitem nicht standhält), $p = 5$ (DIRICHLET und LEGENDRE) und $p = 7$ (G. LAMÉ und V. A. LEBESGUE – nicht H. LEBESGUE!) bekannt. LAMÉ „Beweis“ des allgemeinen Falles (1847) ist unzureichend, da er annimmt, daß ganzalgebraische Zahlen in Kreisteilungskörpern sich bezüglich der Teilbarkeit wie ganzrationale Zahlen benehmen.

[99]Es ist nicht bekannt, ob es unendlich viele reguläre Primzahlen gibt; es gibt aber unendlich viele irreguläre (nicht–reguläre) Primzahlen. p ist regulär, wenn p kein Teiler der Klassenzahl des Körpers $\mathbb{Q}\left(e^{2\pi i \frac{1}{p}}\right)$ ist. Reguläre Primzahlen können auch dadurch charakterisiert werden, daß diese nicht im Zähler der BERNOULLIschen Zahlen B_j, $j \leq (p-3)$, aufgehen.

[100]vgl. [69]

[101]Man vgl. auch die Festrede von A. KNESER, Jber. DMV 1925, 210ff. und H. WEBER, *Kronecker*, Math. Ann. 43.

Lehrer wirkte, für die Mathematik, und er förderte ihn nachhaltig. Der Studienbeginn erfolgte 1841 in Berlin, weiter in Bonn, schließlich bei E. Kummer in Breslau. Die Promotion fand 1845 bei P. G. L. Dirichlet statt; die Dissertation behandelte Einheiten in algebraischen Zahlkörpern. Dann leitete Kronecker mehrere Jahre lang ein der Familie gehörendes Gut, so daß er bis 1853 keine weiteren mathematischen Arbeiten veröffentlichte. Er erwarb ein beträchtliches Vermögen, so daß er sich 1855 als unabhängiger Privatmann in Berlin niederlassen konnte, um seinen mathematischen Neigungen nachzugehen. 1861 wurde er Mitglied der Berliner Akademie und konnte damit auch Vorlesungen an der Berliner Universität halten. 1883 wurde er Nachfolger seines Lehrers Ernst Eduard Kummer.
1853 behauptete er, daß Abelsche Erweiterungen des rationalen Zahlkörpers in Kreisteilungskörpern enthalten sind,[102] und daß Abelsche Erweiterungen imaginär–quadratischer Körper mit Hilfe der komplexen Multiplikation gewonnen werden können („Kronecker's Jugendtraum“). Dies konnte erst 1920 mit Hilfe der Klassenkörpertheorie bewiesen werden, durch T. Takagi.[103]

Kronecker erzielte bedeutende Ergebnisse:

- Algebra: Abstrakter Gruppenbegriff, Beweis des Fundamentalsatzes für endliche abelsche Grupppen. Auflösung der allgemeinen Gleichung 5. Grades mit Hilfe von elliptischen Funktionen. Kronecker konstruierte den Zerfällungskörper eines Polynoms.

- Grundlagenfragen der Mathematik: „Die natürlichen Zahlen hat Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk.“ Kronecker vertrat einen entschieden konstruktivistischen Standpunkt. Definitionen sollten in endlich vielen Schritten entschieden werden können. Reine Existenzbeweise (wie z.B. in der Analysis) werden abgelehnt. Er war ein scharfer Gegner der Cantorschen Mengenlehre.

- Theorie der Zetafunktion (Kroneckersche Grenzformel).

- Theorie der elliptischen Funktionen, Zusammenhänge mit der Theorie der imaginär–quadratischen Zahlkörper.

- Arithmetische Theorie der Zahl– und Funktionenkörper, Einführung von Divisoren.[104]

Nach F. Klein [33], p. 282, hat Kronecker *„auf seinen Arbeitsgebieten viele Beziehungen grundlegender Art, ohne sie noch klar herausarbeiten zu können, vorahnend richtig erfaßt.“*

---

[102] Dieser Satz wurde erst 1886 von H. Weber bewiesen.

[103] Für $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ schon 1903 durch Takagi, für $\mathbb{Q}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$ durch Takenouchi 1916.

[104] In seiner *Algebraic Theory of Numbers*, Princeton 1940, nimmt H. Weyl im Vergleich der Zugänge von Dedekind bzw. von Kronecker deutlich Partei für Kroneckers divisorentheoretischen Zugang (II.2, II.11).

6.3 Dedekind, 1831 – 1916

Julius Wilhelm Richard Dedekind, * 6. 10. 1831 in Braunschweig, † 12. 2. 1916 in Braunschweig. Studium 1848–1850 am Collegium Carolinum, Braunschweig, ab 1850 Mathematik–Studium in Göttingen. Promotion 1852 bei C. F. Gauss über das Euler sche Integral

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

1854 erfolgte die Habilitation in Göttingen. 1858–1862 o.Prof. in Zürich,[105] ab 1863 bis zur Emeritierung 1894 o.Prof. am Polytechnikum Braunschweig, später TH Braunschweig.
Dedekind arbeitete über

- ▷ Grundlagen der Analysis (strenger Aufbau des Zahlsystems, Dedekindsche Schnitte, 1872 *Stetigkeit und irrationale Zahlen*; Dedekinds Begriff *Stetigkeit* wird heute als Vollständigkeit bezeichnet).

- ▷ Anfänge der Galoistheorie für unendliche Erweiterungen, Anfänge der Verbandstheorie. Abstrakter Gruppenbegriff, Galoisgruppe, Wegbereiter der modernen strukturellen Auffassung der Algebra und der Kommutativen Algebra.

- ▷ Mengenlehre, Grundlagen der Mathematik, stand im Streit Cantor / Kronekker auf Seiten Cantors und ermunterte diesen. 1888 erschien *Was sind und was sollen die Zahlen*.

- ▷ Herausgeber von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, Mitarbeiter bei der Herausgabe der Werke von Gauss, Herausgabe der Gesammelten Werke von Riemann gemeinsam mit H. Weber.

- ▷ Mit funktionentheoretischen Methoden wurden Riemannsche Flächen und algebraische Funktionenkörper studiert, gemeinsam mit H. Weber.

- ▷ In der Zahlentheorie beschäftigte Dedekind sich hauptsächlich mit der Theorie der algebraischen Zahlkörper.

  Dedekinds Zugang ist mengentheoretisch. Er führte die Begriffe Ideal und Primideal (in der heutigen Form) ein und zeigte, daß jedes Ideal im wesentlichen eindeutig als Produkt von Primidealen darstellbar ist. Weiter beweist er die Existenz von Ganzheitsbasen in algebraischen Zahlkörpern. Dedekind interpretierte die Gausssche Theorie der binären quadratischen Formen als Idealtheorie in quadratischen Zahlkörpern. In Zusammenarbeit mit Heinrich Weber (1843 – 1913) studierte er auch algebraische Funktionenkörper.

  Die Vorlesung Algebraische Zahlentheorie, die der Verfasser dieses Vorlesungsskripts vor einigen Semestern gehalten habe, geht in großen Teilen auf Dedekind zurück.[106]

[105] als Nachfolger von J. L. Raabe.

[106] Zur modernen Auffassung und Darstellung der algebraischen Zahlentheorie, die auf J. Tates Dissertation bei E. Artin zurückgeht, vgl. man z. B. L. J. Goldstein, *Analytic Number Theory*, 1971, und J. W. S. Cassels & A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, 1967.

Dedekind galt als vorzüglicher akademischer Lehrer, aber ohne unmittelbare Schüler. Seine Auffassungen der Mathematik waren weitreichend und einflußreich.

Viele weitere Informationen enthält die von E. Landau am 12. Mai 1917 gehaltene Gedächtnisrede auf Richard Dedekind, Göttinger Nachrichten 1917, die in den *Gesammelten Werken* von Landau in vol. 6, p. 449 – 465, abgedruckt ist.

7 Theorie der Primzahlen und Zetafunktionen

In diesem Kapitel sollen verschiedene Aspekte der Theorie der Verteilung der Primzahlen behandelt werden. Dabei werden auch die Biographien von Mathematikern, die herausragend zu dieser Theorie beigetragen haben, kurz skizziert (z.T. erst in Kapitel **8**), wie z. B.

P. L. Tschebyschew	1821 – 1894,
J. Hadamard	1865 – 1963,
Ch. de la Vallée–Poussin	1866 – 1962,
E. Landau	1877 – 1938,
G. H. Hardy	1877 – 1947,
J. E. Littlewood	1885 – 1977,
C. L. Siegel	1896 – 1981,
P. Turán	1910 – 1976,
P. Erdös	1913 – 1996,

und andere . . . .

7.1 Probleme über die Verteilung der Primzahlen

Primzahlen faszinierten Mathematiker und Zahlenliebhaber, ohne daß bis etwa 1840 (d. h. vor Dirichlet) tiefere Ergebnisse bewiesen werden konnten.
Folgende Probleme traten auf, die zum Teil erheblichen Einfluß auf die Entwicklung der Zahlentheorie hatten.

- ▷ Existenz unendlich vieler Primzahlen. Beweise hierfür gaben Euklid, Euler, Goldbach (Pólya), und viele andere.

- ▷ Die quantitative Fassung der vorstehenden Fragen führt zum Primzahlsatz (Hadamard, de la Vallée–Poussin, 1896):

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad \vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p \sim x, \quad \psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) \sim x.$$

- ▷ Existenz unendlich vieler Primzahlen in Restklassen, Dirichlets Primzahlsatz.

- ▷ Wie erkennt man Primzahlen, gibt es handliche Primzahltests?

▷ Gibt es viele „Pseudoprimes“ (CARMICHAEL–Zahlen),[107] die durch die Eigenschaft

$$n \text{ ist nicht prim und } a^{n-1} \equiv 1 \bmod n$$

definiert sind.

Beispiele sind: $561 = 3 \times 11 \times 17, \quad 1105 = 5 \times 13 \times 17, \quad 1729 = 7 \times 13 \times 19.$

▷ Wie erstellt man größere Primzahltafeln? Das erste hierfür brauchbare Verfahren ist das *Sieb des Eratosthenes*.

▷ Untersuchung von Primzahlen spezieller Gestalt, z. B.[108]

- MERSENNEsche Zahlen $M_q = 2^q - 1$.
- FERMATsche Zahlen $F_n = 2^{2^n} + 1$.
- Reguläre Primzahlen: Diese hängen mit FERMATs Vermutung zusammen, daß $x^p + y^p = z^p$ nichttrivial unlösbar ist. p heißt regulär, wenn p nicht in der Klassenzahl $h(p)$ des Kreisteilungskörpers $\mathbb{Q}(\zeta)$, $\zeta = \exp(2\pi i \frac{1}{p})$ aufgeht. Für diese ist FERMATs Vermutung richtig. Die ersten irregulären Primzahlen sind

  $$37,\ 59,\ 67,\ 101,\ 103,\ 131,\ 149,\ 157.$$

  Gibt es unendlich viele reguläre Primzahlen? (Antwort ist unbekannt!) Gibt es unendlich viele irreguläre Primzahlen? (ja!)
- WIEFERICH sche Primzahlen p erfüllen

  $$2^{p-1} \equiv 1 \bmod p^2.$$

  Ist der erste Fall der FERMAT–Vermutung falsch für p, so erfüllt p obige Kongruenz. 1093 und 3511 sind die einzigen Wieferich–Primzahlen unterhalb 4×10^{12} (CRANDALL, DILCHER, POMERANCE).
- WILSON primes. Die Kongruenz $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$ ist für Primzahlen richtig. Eine WILSONsche–Primzahl erfüllt $(p-1)! \equiv -1 \bmod p^2$. Die einzigen bekannten Beispiele sind 5, 13, 563.
- Repunits: $R_n = \frac{10^n-1}{9} = 111\ldots11$. Wann ist R_n prim? Notwendig ist, daß n prim ist. R_2, R_{19}, R_{23}, und R_{317}, sind prim, für alle anderen $p \leq 23000$ ist R_p zusammengesetzt.

▷ Man gebe `prime-representing functions` oder Formeln für die n–te Primzahl p_n.[109] Ein Polynom mit ganzen Koeffizienten kann niemals nur Primzahlen als Werte haben.[110] Im Zusammenhang mit der negativen Lösung des zehnten HILBERTschen Problems durch Y. MATIJASEVIČ – es gibt keinen universellen

---

[107] Korselt 1899, Carmichael 1912.

[108] Man sehe z. B. [49], [50].

[109] Eine historische Übersicht über Formeln für die n-te Primzahl gibt J. KNOPFMACHER, *Recursive formulae for prime numbers*, Archiv Math. 29, 271–279 (1977).

[110] Euler's Polynom $x^2 + x + 41$ hat für $0 \leq x \leq 39$ prime Werte.

Algorithmus, der es erlaubt, eine polynomiale diophantische Gleichung mit ganzen Koeffizienten in endlich vielen Schritten auf Lösbarkeit in ganzen Zahlen zu testen – wurden explizit angebbare Polynome mit ganzen Koeffizienten in 26 Variablen (vom Grade 25) gefunden; z.B. haben P. JONES, D. SATO, H. WADA & D. WIENS ein solches angegeben (Amer. Math. Monthly 83, 1975), dessen positive Werte nur Primzahlen sind.

▷ Können irreduzible Polynome vom Grade ≥ 2 unendlich viele Primzahlen darstellen? [Diese Frage ist offen, selbst für $f(n) = n^2 + 1$]

▷ Gibt es große Lücken zwischen Primzahlen? Nach R. RANKIN, 1938, 1940, ist unendlich oft

$$p_{n+1} - p_n > e^{\mathcal{C}} \cdot \frac{\log n \cdot \log\log n \cdot \log\log\log\log n}{(\log\log\log n)^2}.$$

Man beachte, daß die Zahlen $L! + 2, L! + 3, \ldots, L! + L$ alle nicht prim sind. Die Lücke hat mindestens die Länge $L - 1$, wegen STIRLINGs Formel ist $L \asymp \log n / \log\log n$.

Große Lücken der Längen 533, 601, 651 liegen z. B. zwischen

614 487 453 523	1 968 188 556 461	2 614 941 710 599
614 487 454 057	1 968 188 557 063	2 614 941 711 251

Große Differenzen aufeinanderfolgender Primzahlen kommen nur selten vor.

▷ Man gebe Verfahren zur numerischen Berechnung der Werte $\pi(x)$ für große x, z.B. für $x = 10^{16}$ (E. D. F. MEISSEL, D. H. LEHMER, D. C. MAPES, J. C. LAGARIAS, V. MILLER, A. M. ODLYZKO). 1996 berechneten J. RIVAT & M. DELÉGLISE den Wert $\pi(10^{18})$, und später DELÉGLISE auch $\pi(10^{19})$ und
$$\pi(10^{20}) = 2\ 220\ 819\ 602\ 560\ 918\ 840.$$

▷ Im Zusammenhang mit der Größe des Restglieds $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ des Primzahlsatzes sind die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion von großer Bedeutung. Somit ergibt sich die Notwendigkeit, die Verteilung dieser Nullstellen möglichst gründlich zu studieren.

▷ Vergleichende Primzahltheorie (P. TURÁN, S. KNAPOWSKI, J. PINTZ). Diese Theorie untersucht z. B. die Schwankungen der Differenzen $\pi(x; q, a) - \pi(x; q, b)$.

▷ Additive Primzahltheorie, die ihren Ausgang nahm von CHRISTIAN VON GOLDBACHs Frage (7. 6. 1742) an EULER, ob jede gerade natürliche Zahl $n > 4$ eine Summe von zwei Primzahlen sei.[111]

[111]GOLDBACH, * 18.. 3. 1690 in Königsberg, † 1. 12. 1764 in Petersburg, war Mathematiker und Diplomat. Er war zeitweise Erzieher des Prinzen Peter in Moskau (von 1715–1730), des späteren Zars Peter II. Später wechselte er in den Dienst des Auswärtigen Ministeriums in Moskau. Sein Name lebt durch seine GOLDBACHsche Vermutung, er hat aber auch originelle Beiträge zur Zahlentheorie und Analysis vorzuweisen.

▷ Gibt es unendlich viele Primzahlzwillinge, gibt es unendlich viele Primzahl–3–tupel, ..., , Primzahl–k–tupel?

▷ BERTRANDs Postulat

für $x > 2$ gibt es zwischen x und $2x$ mindestens eine Primzahl

ist durch den Primzahlsatz als zutreffend erwiesen. Gibt es aber immer eine Primzahl zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadraten oder aufeinanderfolgenden Kuben, ...?

7.2 Elementare Primzahltheorie

Der *Primzahlsatz*, d. h. eine [möglichst genaue] Aussage über das asymptotische Verhalten der Primzahl–Zähl–Funktion $\pi(x) = \sum_{p \le x} 1$, z. B.

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \qquad \text{d.h. } \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} = 1,$$

und die Verteilung der Primzahlen in arithmetischen Progressionen, d.h. das Studium der Funktion[en]

$$\pi(x; q, a) = \sum_{p \le x,\ p \equiv a \bmod q} 1,$$

wenn a und q teilerfremd sind, waren bis etwa 1850 bzw. bis etwa 1890 gewichtige, offene Probleme, die die Zahlentheoretiker herausfordern konnten, zumal es die Vermutungen von LEGENDRE, daß $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x - B}$ sei, und von GAUSS, $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$, gab; genauer sollte nach GAUSS die Funktion $\pi(x)$ mit dem Integrallogarithmus verglichen werden,

$$\pi(x) \sim li(x) \stackrel{\text{def}}{=} li(2) + \int_2^x \frac{du}{\log u}.$$

Numerisch konnte [für „kleine“ x] eine außerordentlich gute Übereinstimmung von $\pi(x)$ und li(x) festgestellt werden:

x	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
$\pi(x)$	168	1229	9592	78 498	664 579	5 751 455	50 847 534
$li(x)$	178	1246	9630	78 628	664 918	5 762 209	50 849 235

Die *Größenordnung* von $\pi(x)$ konnte PAFNUTI LWOWITSCH TSCHEBYSCHEW (* 16. 5. 1821, † 8. 12. 1894 in St. Petersburg) bestimmen. TSCHEBYSCHEW war ein Sohn aus adeliger Familie; 1837 erfolgte der Beginn des Studiums in Moskau, 1841 der Abschluß (mit einer Arbeit über die numerische Auflösung algebraischer Gleichungen höheren Grades). Die Dissertation gab einen *Versuch einer elementaren Darstellung der Wahrscheinlichkeitstheorie*, 1846; die Habilitationsschrift befaßte sich mit der Theorie der Kongruenzen. 1850 wurde TSCHEBYSCHEW o. Prof. in Petersburg, ab 1859 o. Mitglied der dortigen Akademie.

TSCHEBYSCHEW trat mit Arbeiten hervor zur

- ▷ Analysis (einschließlich der Numerischen Mathematik): Approximationstheorie, konstruktive Funktionentheorie, Integralrechnung, elliptische Integrale.
- ▷ Wahrscheinlichkeitstheorie: Summen unabhängier Zufallsvariablen, Erwartungswert.
- ▷ Kartographie: Konstruktion geographischer Karten für die kartenmäßige Erfassung Rußlands.
- ▷ Zahlentheorie: Primzahlverteilung, Konvergenz von Reihen über Primzahlen, Ergebnisse zu quadratischen Formen.

Mit elementaren Methoden, gestützt auf die Primfaktorzerlegung von Fakultäten, zeigte TSCHEBYSCHEW das BERTRANDsche Postulat: zwischen x und $2x$ liegt mindestens eine Primzahl. Genauer bewies er 1851, 1852 die Ungleichungen

$$0.92129 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} \cdot \log x \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} \cdot \log x \leq 1.1056,$$

und weiterhin:

$$\text{Wenn} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} \quad \text{existiert, so ist dieser Limes} \quad = 1.$$

Die elementar zugänglichen Formeln

$$\sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + \mathcal{O}(1)$$

und

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + A + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

wurden erst von F. MERTENS gezeigt (1874).[112] Die Behauptung (?? Vermutung!) von TSCHEBYSCHEW, 1853, daß

$$\lim_{r\to 0+} \sum_{p>2} (-1)^{\frac{1}{2}\cdot(p-1)} \cdot e^{-pr} = -\infty$$

sei, d.h. daß es „mehr“ Primzahlen kongruent 3 mod 4 als solche kongruent 1 mod 4 gibt, wurde zur Grundlage von P. TURÁNs *Comparative Prime Number Theory.* Allerdings ist TSCHEBYSCHEWs Behauptung äquivalent zur Richtigkeit der RIEMANNschen

[112] FRANZ CARL JOSEPH MERTENS, * 20. 3. 1840 bei Posen, † 5. 3. 1927 in Wien, promovierte 1864 in Berlin, war ab 1865 a.o. Professor und ab 1869 o. Professor in Krakau, ab 1884 in Graz, und von 1894–1911 an der Universität Wien. Ihn interssierten algebraische Gleichungen, Vorzeichenbestimmung GAUSSscher Summen, Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung, elementare Primzahltheorie. Die MERTENSsche Vermutung

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left| \sum_{n\leq x} \mu(n) \right| \leq 1,$$

für $x > 200$, wurde 1983 durch ODLYZKO & H. J. TE RIELE widerlegt, nach Vorarbeiten von W. JURKAT & A. PEYERIMHOFF in Ulm.

Vermutung für $L(s,\chi)$, wobei χ der Nicht–Haupt–Charakter modulo 4 ist, so daß es völlig unwahrscheinlich ist, daß TSCHEBYSCHEW einen Beweis für diese Behauptung hatte.
Ohne Zweifel waren TSCHEBYSCHEWs Ergebnisse zur Verteilung der Primzahlen eine gewaltige Leistung, die den Stand seiner Kollegen aus der Zahlentheorie turmhoch überragte. Seine Konstanten 0.9... und 1.1... wurden später noch geringfügig verbessert, aber für den Beweis des Primzahlsatzes bedurfte es völlig neuer Ideen.

7.2.1 Paul Turán, 1910 – 1976

PAUL TURÁN, geboren am 28. 8. 1910 in Budapest, † am 26. 9. 1976 in Budapest, studierte in Budapest. Die Promotion erfolgte 1935. Während der nationalsozialistischen Besetzung Ungarns war TURÁN interniert. Ab 1949 wurde er Professor in Budapest. Er war verheiratet mit der Schauspielerin VERA TURÀN–SOS, die auch in der Geometrie der Zahlen und der Graphentheorie als ideenreiche Mathematikerin hervorgetreten ist. TURÀN regte durch ungewöhnliche Fragestellungen die zahlentheoretische Forschung an, auch der Vortragende hat PAUL TURÀN viel [Förderung in der Mathematik] zu verdanken.
TURÀN gab, oft in Zusammenarbeit mit PAUL ERDÖS, wesentliche Beiträge zur analytischen und probabilistischen Zahlentheorie, zur Kombinatorik, und zu Extremaluntersuchungen in der Graphentheorie. TURÁN war in Ungarn einflußreich und war zusammen mit ERDÖS maßgeblicher „Verantwortlicher“ für die starke Stellung der Zahlentheorie in Ungarn; wir nennen die Namen IMRE KÁTAI, K. GYÖRY, GABOR HALÁSZ, JANOS PINTZ, A. SÁRKÖZY, IMRE RUZSA, E. SZÉMEREDI, ...
TURÁNs “Comparative Prime Number Theory”, u.a. auch zusammen mit S. KNAPOWSKI entwickelt, beruhte auf der eigens hierfür entwickelten Methode der [unteren] Abschätzung von Potenzsummen.[113]
Schon 1934 legte TURÁN die Grundlage für die Anwendung von wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden in der Zahlentheorie. Er bewies damals ganz kurz ein Ergebnis von G. HARDY, daß

$$\omega(n) = \sum_{p|n} 1 \quad \text{„meistens“ nahe bei} \quad \log\log n$$

ist. Dies folgte durch asymptotische Auswertung der Summe

$$\sum_{p\le x} (\omega(n) - \log\log n)^2.$$

Später wurde dann gezeigt, daß für $x \to \infty$

$$\frac{1}{x} \cdot \# \left(n \le x;\ \frac{\omega(n) - \log\log n}{\sqrt{\log\log n}} \le u \right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv,$$

die Normalverteilung, strebt.

[113] Man vgl. P. TURÁN, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, Budapest 1953, mit späteren Neuauflagen.

7.2.2 Paul Erdös, 1913 – 1996

PAUL ERDÖS wurde am 26. 3. 1913 in Budapest geboren, die Promotion erfolgte 1934 in Budapest. † September 1996 in Warschau. ERDÖS reiste fast ständig und arbeitete mit Mathematikern aus aller Welt zusammen. Er schrieb mehr als 1500 wisenschaftlihce Arbeiten, zu Zahlentheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie, Mengenlehre, Kombinatorik, Graphentheorie, und schwierigen kombinatorischen Abzählverfahren, sehr oft mit Co–Autoren.[114] Berühmt sind die schwierigen Probleme von ERDÖS, für deren Lösung er teilweise Preise aussetzte. Meines Wissens war die höchste Summe, die er jemals ausbezahlt hat, 1000 $, die an E. SZÉMEREDI für die Lösung des folgenden Problems gingen:[115]

> Jede Untermenge der natürlichen Zahlen mit positiver Dichte enthält arithmetische Progressionen beliebiger Länge.[116]

ERDÖS hat gegen 1940 die asymptotische Formel für die Anzahl der Partitionen $p(n)$ einer natürlichen Zahl n,

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} \exp(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}) \cdot \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\log n}{n^{\frac{1}{4}}}\right)\right)$$

elementar bewiesen; die Partitionenfunktion hat die erzeugende Potenzreihe

$$\sum_0^\infty p(n)z^n = \prod_{m=1}^\infty (1 - x^m)^{-1}.$$

1948 gelang ERDÖS, etwa gleichzeitig mit A. SELBERG,[117] aber unabhängig von diesem, der *elementare* Beweis des Primzahlsatzes. ERDÖS erhielt z.B. den renommierten Wolf–Preis der israelischen Wolf–Foundation.

7.3 Der Primzahlsatz

Der Primzahlsatz

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \qquad \vartheta(x) \sim x, \qquad \psi(x) \sim x,$$

war durch GAUSS und LEGENDRE vermutet worden. Die Beiträge von TSCHEBYSCHEW zu diesem Problem wurden schon gewürdigt (siehe p. 49, ebenso die leichte Verbesserung durch SYLVESTER 1891. Die entscheidenden Ideen, die den Beweis des Primzahlsatzes möglich machten, kamen von B. RIEMANN und sind ebenfalls schon erwähnt

[114] Die „Erdös–Zahl“ mißt, wie nahe ein Autor einer gemeinsamen Arbeit mit ERDÖS gekommen ist.

[115] Später wurde das Problem mit ergodentheoretischen Methoden durch H. FÜRSTENBERG, Israel, nochmals [nach Meinung des Verfassers — einfacher] gelöst.

[116] Der erste Lösungsansatz ging auf K. F. ROTH zurück, der mit Hilfe von Exponentialsummen das Problem für arithmetische Progressionen der Länge 3 löste. Für die Länge 4 hat sich EDUARD WIRSING sehr verdient gemacht, der den SZÉMEREDIschen Beweis (in Nottingham) für diesen Fall nach langen Diskussionen verstand und verständlich aufgeschrieben hat – um 1976.

[117] Man sehe **7.4.2**, p. 58.

worden (**5.6**, p. 38). Der Beweis des Primzahlsatzes hängt eng mit den nichttrivialen komplexen Nullstellen der Zetafunktion zusammen.
1892, 1893 begann J. HADAMARD ein systematisches Studium der ganzen Funktionen, wobei er auch den Produktsatz von WEIERSTRASS–HADAMARD fand, der für ganze Funktionen endlicher Wachstumsordnung viel genauere Aussagen als der WEIERSTRASSsche Produktsatz machte.

7.3.1 J. Hadamard, 1865 – 1963

JACQUES HADAMARD wurde am 8. 12. 1865 in Versailles geboren, † 17. 10. 1963, Paris. Das Studium erfolgte 1884–1888 in Paris, 1890–1893 war HADAMARD Gymnasiallehrer. Habilitation 1892, 1893–1897 Dozent in Bordeaux, 1897–1909 Sorbonne Paris, 1909–1937 am Collège de France. HADAMARD beeinflußte viele Teilgebiete der Mathematik wesentlich.

- ▷ Analytische Funktionen, die Bestimmung des Konvergenzradius von Potenzreihen (HADAMARDs Formel), singuläre Punkte auf dem Konvergenzkreis, HADAMARDs Multiplikationssatz. Potenzreihen mit Lücken (HADAMARDs Lückensatz).
- ▷ Flächen negativer Krümmung, Geodätische auf diesen. Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung. Begriff der *korrekt gestellten Probleme*.
- ▷ Quasi–Analytizität, Wärmeleitungsgleichung. Anwendungen in der mathematischen Physik.
- ▷ Beweis des Primzahlsatzes.

7.3.2 La Vallée–Poussin, 1866 – 1962

CHARLES Baron DE LA VALLÉE–POUSSIN, * 14. 8. 1866, Louvain/Löwen (Belgien), † 2. 3. 1962. Prof. der Analysis in Louvain, 1914–1918 an der Sorbonne und am Collége de France.

- ▷ Wichtige Beiträge zur Theorie der Fourrierreihen.
- ▷ Potentialtheoretische Beiträge, Balayage–Prinzip („Auskehren“ der Masse), Lösung des Dirichletschen Randwertproblems mit Hilfe des harmonischen Maßes.
- ▷ In der Zahlentheorie: Beweis des Primzahlsatzes und des Primzahlsatzes für die Progression $\left(\text{mit Restglied } \mathcal{O}\left(x \cdot \exp\left(-c \cdot \sqrt{\log x}\right)\right)\right)$.

7.3.3 Primzahlsatz

HADAMARD und DE LA VALLÉE–POUSSIN bewiesen den Primzahlsatz. Wesentlich war, ein nullstellenfreies Gebiet der Zetafunktion im kritischen Streifen zu beweisen.[118]

[118] Dieser Zusammenahng zwischen der Größenordnung des Restgliedes im Primzahlsatz und dem Realteil von Nullstellen der Zetafunktion wird z. B. in A. E. INGHAMs Monographie [27] ausgeführt.

Die Riemannsche Zetafunktion ist $\neq 0$ für $\Re(s) = 1$, darüber hinaus sogar für[119]

$$\sigma > 1 - \frac{\gamma_1}{\log(|t| + \gamma_2)}.$$

Die Methode führte auch zum Beweis des Primzahlsatzes mit Restglied,

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathcal{O}\left(x \exp\left(-c\sqrt{\log x}\right)\right).$$

Als Konsequenzen aus dem Primzahlsatz erhält man [asymptotische] Ergebnisse über

$$\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p}, \quad \prod_{p \le x} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

etc. Ebenso ergeben sich Abschätzungen der Summen

$$\sum_{n \le x} \mu(n) \quad \text{und} \quad \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n}$$

mit der MÖBIUS–Funktion $n \mapsto \mu(n)$.[120]

7.4 Weitere Forschungen zur Verteilung der Primzahlen

7.4.1 E. Landau, 1877 – 1938

EDMUND LANDAU * 14. 2. 1877, Berlin, † 19. 2. 1938, war Sohn eines Professors für Gynäkologie. Seit 1905 war LANDAU verheiratet mit MARIANNE EHRLICH (1886 – 1963). Das Studium erfolgte vorwiegend in Berlin, insbesondere bei FROBENIUS, unterbrochen durch Studien in München und Paris. Das Promotionsthema (1899) war *Neuer Beweis der Gleichung* $\sum_1^\infty \frac{\mu(k)}{k} = 0$. Die Habilitation erfolgte 1901, mit Untersuchungen DIRICHLETscher Reihen.[121]

---

[119] Über die derzeit besten Ergebnisse zu nullstellenfreien Gebieten der Zeta–Funktion kann man z.B. bei A. IVIĆ Chapter Six, p. 143ff. nachlesen. M. KOROBOV und I. M. VINOGRADOV zeigten (in der korrigierten Fassung von H.–E. RICHERT, daß $\zeta(s) \neq 0$ gilt für $\sigma > 1 - \frac{\gamma_3}{(\log(|t|+2))^{-\frac{2}{3}} \cdot (\log\log(|t|+2))^{-\frac{1}{3}}}$. Man vgl. 59.

[120] Der enge Zusammenhang zwischen dieser Funktion und der Zetafunktion besteht wegen der Faltungsdarstellung $\mu * 1 = \epsilon$, die $\zeta(s) \cdot \sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n^s} = 1$ zur Folge hat.

[121] Aus der Beurteilung der Habilitationsschrift durch FROBENIUS werde nach MIRSKY, [39], zitiert:

> *Alle diese mannigfaltigen Untersuchungen zeigen, dass der Verfasser auf dem bezeichneten Felde die ausgedehntesten Kenntnisse und eine anerkennenswerte Fertigkeit erworben hat. Es ist aber sehr zu wünschen, dass er aufhört, seine Untersuchungen auf dies ausserordentlich enge Gebiet zu beschränken, und anfängt, sich anderen Fragen von allgemeinerem Interesse und höherer Bedeutung zuzuwenden.*

MIRSKY nennt dies eine *short–sighted judgement* — dem würde ich mich vorbehaltlos anschließen. Sechzehn Jahre später, als LANDAU evtl. nach Berlin berufen werden sollte, schrieb FROBENIUS:

1909 wurde LANDAU Nachfolger von MINKOWSKI in Göttingen. Mit D. HILBERT, F. KLEIN und LANDAU war Göttingen damals (bis zur Entrechtung und Verfolgung der jüdischen Kollegen im „Dritten Reich“, ab 1933) das Zentrum der mathematischen Welt. Vorher hatten schon GAUSS, F. KLEIN und DIRICHLET für Göttingen's Stellung gesorgt, sodann auch H. MINKOWSKI, später auch C. L. SIEGEL, H. HASSE, noch später z.B. H. GRAUERT. Als Jude mußte LANDAU 1933 nach heftigen, gegen ihn organisierten Ausschreitungen der NS–Studentenschaft, seinen Lehrstuhl aufgeben — wie auch sein enger Freund ISSAI SCHUR. LANDAU war ein engagierter Hochschullehrer.[122] Die erzwungene Emeritierung (im Alter von 56 Jahren) war ein herber Schlag für ihn. LANDAU war Mitglied der Akademien in Berlin, Göttingen, Halle, Petersburg und Rom, Ehrenmitglied der London Math. Society. Er schrieb mehr als 250 wissenschaftliche Arbeiten.
Zu seinen Schülern gehören P. BERNAYS, G. DOETSCH, K. GRANDJOT, H. A. HEILBRONN, D. JACKSON, E. KAMKE, A. J. KEMPNER, L. NEDER, A. OSTROWSKI, W. ROGOSINSKI, W. SCHMEIDLER, C. L. SIEGEL, A. WALFISZ. Man könnte nicht `de jure`, aber `de facto`, noch die Namen HARALD BOHR und J. G. VAN DER CORPUT hinzfügen.
LANDAU war sehr einflußreich als Verfasser ausgezeichneter, jeweils auf der Höhe der Zeit stehender Lehrbücher, nämlich:

— *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, 2 Bände, 1909,
— *Darstellung und Begründung einier neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, 1916 / 1929,[123]
— *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und Ideale*, 1918, 1927,
— *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 3 Bände, 1927,[124]
— *Grundlagen der Analysis*, 1930,
— *Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung*, 1934, Groningen,
— *Über einige Fortschritte der additiven Zahlentheorie* (Cambridge 1937).

Außer den beiden Bänden zur Analysis sind, nach G. HARDY, LANDAUs Monographien *of first–rate importance and high distinction.* Nebenbei: distinction kann sowohl Auszeichnung, Ehre, wie auch Haarspalterei bedeuten. Die Bücher sind fehlerfrei, es gibt keine Zweideutigkeiten oder Auslassungen. Der LANDAUsche Stil ist berühmt,

---

> *Die Mehrzahl der Arbeiten von Landau würde, so schätzenswert sie heute sind, an dem Tag ihren Wert verlieren, wo für eine gewisse Vermutung von Riemann der vollständige Beweis gelänge.*

Diese Bemerkung stimmt keineswegs, und die RIEMANNsche Vermutung ist auch heute noch offen.

[122] Wiederum nach MIRSKY, [39], gilt für LANDAUs Vorlesungen: ... *and the reputation of his lecture courses gradually acquired an almost legendary aura.*

[123] ... *is probably Landau's most beautiful book. It contains a collection of elegant, significant, and entertaining theorems of modern function theory. ... It is one of the most attractive little volumes in recent mathematical literature, and the most effective answer to any one who suggests that Landau's mathematics was dull.*

[124] In den Vorlesungen wird die Zahlentheorie von den Anfängen entwickelt, sodann wird die additive, die analytische und die geometrische Seite der Zahlentheorie entwickelt; die zweite Hälfte des dritten Bandes enthält praktisch alles, was zur damaligen Zeit über die FERMATsche Vermutung bekannt war.

es wird nach starker Kompression des Materials gestrebt, so daß die Bücher schwer zu lesen sind und die Ideen beim ersten oder unaufmerksamen Lesen untergehen.[125] LANDAU gibt die kürzesten, elegantesten und einsichtigsten Beweise. Im *Handbuch* wird zum ersten Mal die analytische Zahlentheorie lehrbuchmäßig vorgestellt, als eine systematische Wissenschaft. Nach HARDY & HEILBRONN, 1938 ([24]) gilt hierfür:

> *the book transformed the subject, hitherto the hunting ground of a few adventurous herois, into one of the most fruitful fields of research of the last thirty years. Almost everything in it has been superseded, and that is the greatest tribute to the book.*

In der Forschung hatte LANDAU viele schöne Ergebnisse zur Funktionentheorie und Zahlentheorie. Es sollte auch bemerkt werden, daß die Arbeiten von LANDAU eine Fülle historischer, äußersst präziser Fakten geben, so daß seine Arbeiten auch für die Geschichte der Zahlentheorie von großem Nutzen sind.

- ▷ In der Funktionentheorie gab er viele Ergebnisse über funktionentheoretische Eigenschaften von Dirichletreihen, er gab entscheidend wichtige Beiträge zum Großen PICARDschen Satz. Der Taubersatz von LANDAU & IKEHARA ist mit seinem Namen verbunden, der vermutlich einen der einfachsten Zugänge zum Beweis des Primzahlsatzes bietet. Er gab ebenso einen neuen, eleganten Beweis des WEIERSTRASSschen Approximationssatzes. Dirichletreihen mit nichtnegativen Koeffizienten haben wenigstens eine Singularität auf der Konvergenzgeraden (1905).

- ▷ In der Zahlentheorie behandelte LANDAU viele Problemstellungen.

  - Primzahltheorie: neuer, einfacher Beweis des Primzahlsatzes (1903), der von der HADAMARDschen Theorie ganzer Funktionen unabhängig ist; auch die Funktionalgleichung der ζ–Funktion ist nicht erforderlich. Dies war entscheidend für LANDAUs Beweis des Primidealsatzes in algebraischen Zahlkörpern, 1903. Erst viel später, 1917, konnte E. HECKE zeigen, daß die entsprechende DEDEKINDsche Zeta–Funktion auf die ganze Ebene fortsetzbar ist. LANDAU nahm auch WIENERsche Ideen auf und gab einen sehr einfachen, weiteren Beweis des Primzsahlatzes. Er klassifizierte verschiedene Problemstellungen nach ihrer *„Tiefe“* und zeigte, daß die folgenden Aussagen *„elementar äquivalent“* sind:

    - ∗ Primzahlsatz $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$.
    - ∗ $\sum\limits_{n\le x} \dfrac{\mu(n)}{n} \to 0$ für $x \to \infty$
    - ∗ $M(x) = \sum\limits_{n\le x} \mu(n) = o(x)$.

[125] Als Gegenpol möchte ich insbesondere das wunderschöne Buch *Sequences* von H. HALBERSTAM & K. F. ROTH nennen.

* $\displaystyle \sum_{n\le x} \frac{\mu(n)\log n}{n} \to -1.$
* $Q(x) - \dfrac{6}{\pi^2}x = o(\sqrt{x})$, wobei $Q(x)$ die Anzahl der quadratfreien Zahlen unterhalb x bezeichnet.

– Die Anzahl $N(\sigma, T)$ der Nullstellen der Zeta–Funktion in $0 \le Im(s) \le T$, $\sigma \le Re(s) \le 1$ erfüllt (für $\sigma > \frac{1}{2}$ die Abschätzung $N(\sigma, T) = o(T)$, 1914, zusammen mit H. Bohr.[126]

– Additive Zahlentheorie: Jede hinreichend große Zahl ist Summe von höchstens 8 positiven Kuben (1909); das Ergebnis wurde bis 1938 nicht überholt. Erst Yu. V. Linnik zeigte $G(3) \le 7$, 1942. Die besten Ergebnisse für das Waring–Problem für kleine Exponenten gehen heute auf J. Brüdern, T. Wooley, und andere zurück.

Mit Heilbronn und Scherk zeigte Landau mit der Schnirelmannschen Methode, daß jede hinreichend große Zahl Summe von höchstens 71 Primzahlen ist (Schnirelmann hatte vorher die Möglichkeit der Darstellung mit etwa 800.000 Summanden gezeigt) (1936). Allerdings konnte ein Jahr später, 1937, I. M. Vinogradov seinen berühmten Drei–Primzahlensatz beweisen.[127]

– Jede positiv definite quadratische Form mit rationalen Koeffizienten ist Summe von 5 Quadraten rationaler Linearformen, und 5 ist bestmöglich (1906).

– In der Gitterpunkttheorie erbrachte Landau mit asymptotischen Formeln für die Anzahl der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten (*„Gitterpunkte“*) in gewissen Bereichen gewichtige Beiträge. Für den Gitterrest beim Kreisproblem z.B. zeigte er erheblich einfacher als bisher die Abschätzungen $\mathcal{O}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$ und $\Omega\left(x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}\right)$. Er gab sehr gute Ergebnisse über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden und einen *„kolossalen Gitterpunktsatz“*, der viele vorhergehende Ergebnisse zusammenfaßte und verbesserte. Methodisch werden Fourierreihen, Dirichletreihen und Besselfunktionen benutzt.

– Mit Ostrowski zeigte Landau (unabhängig hat dies auch Thue[128] bewiesen) 1920, 1922: *Ist $n \ge 3, ad \ne 0, b^2 - 4ac \ne 0$, dann hat die diophantische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = dy^n$$

höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen x, y.

– Bei zahlentheoretischen Funktionen interessierte sich Landau für deren asymptotisches Verhalten. Z.B.

---

[126] Harald August Bohr, * 22. 4. 1887, † 22. 1. 1951, Kopenhagen. Bruder des Physikers Niels Bohr, 1885 – 1962, der für sein Atommodell 1922 den Nobelpreis erhalten hatte. Harald Bohr befaße sich zunächst mit Eigenschaften von Dirichletschen Reihen; danach führte er die wichtige Klasse der fastperiodischen Funktionen ein und studierte deren Eigenschaften.

[127] Man sehe **8.5**, 78.

[128] Axel Thue, 19. 2. 1863 – 7. 3. 1922, ab 1903 Professor an der Universität Kristiania (Oslo). Wichtige Beiträge zur Theorie der Diophantischen Approximationen und der Diophantischen Gleichungen (man sehe **7.5.1**, p. 68.

* Bezeichnet $B(x)$ die Anzahl der als Summe von zwei Quadraten darstellbaren ganzen Zahlen $\leq x$ (diese können nur Potenzen von 2, Primzahlen $p \equiv 1 \bmod 4$ in beliebiger Potenz und Primfaktoren $p \equiv 3 \bmod 4$ in gerader Potenz als Faktoren enthalten) die asymptotische Formel
$$B(n) \sim \frac{n}{\sqrt{\log n}}.$$
* Bezeichnet $f(n)$ die Maximalordnung von Elementen der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$, so gilt
$$\log f(n) \sim \sqrt{n \log n}.$$
* LANDAU widerlegte LEGENDREs Vermutung über $\pi(x)$ und STÄCKELS Näherungsformel
$$r_2(n) \sim \frac{n^2}{\log^2 n \cdot \varphi(n)}$$
für die Anzahl der Darstellungen von n, n gerade, als Summe zweier Primzahlen.
* Beim *International Congress of Mathematicians* in Cambridge, 1912, war LANDAU eingeladen, einen Hauptvortrag zu halten; er wählte hierfür das Thema *„Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion.*

7.4.2 Forschungsmöglichkeiten in der analytischen Zahlentheorie

Blieb den Zahlentheoretikern noch Arbeit oder blieben noch interessante Probleme, nachdem der Primzahlsatz bewiesen worden war? Natürlich ja! Im allgemeinen gebiert die Lösung eines wichtigen Problems eine Vielzahl neuer Fragen und Probleme — und dies traf auch für die Verteilung der Primzahlen zu. Insbesondere wurde die Zetafunktion jetzt ein wichtiges Studienobjekt, auch im Hinblick auf die verbliebene Herausforderung der ungelösten RIEMANNschen Vermutung.

▷ Vereinfachung des analytischen Beweises des Primzahlsatzes. Hier tat sich besonders E. LANDAU hervor. Erstellung, Beweise, und Erklärung des Zusammenhangs zwischen nullstellenfreien Gebieten der Zetafunktion und die Ordnung des Restgliedes im Primzahlsatz (z.B. bei A. E. Ingham, [27]); man sehe P. TURÁN, On Riemann's Hypothesis, Izv. Akad. Nauk 1947, und *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, 1953.

▷ Suche nach weiteren Methoden, um den Primzahlsatz zu beweisen:

  – Tauber'sche Sätze (LANDAU–IKEHARA, WIENER). *Seien alle* $a_n \geq 0$, *die Dirichlet–Reihe* $g(s) = \sum a_n n^{-s}$ *konvergiere in Re* $s > 1$. *Für alle* T *strebe für* $\sigma \to 1+$ *die Funktion* $g(s) - \frac{A}{s-1}$ *gleichmäßig in* $|t| \leq 2T$ *gegen eine stetige Funktion* $G(t)$. *Dann gilt für* $x \to \infty$
$$\sum_{n \leq x} a_n \sim A \cdot x.$$

Der Primzahlsatz folgt unmittelbar durch Anwendung dieses Taubersatzes auf die Dirichlet–Reihe

$$g(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}$$

unter Beachtung der Tatsache, daß $\zeta(s)$ auf $\mathrm{Re}\, s = 1$ keine Nullstelle besitzt.

Der Wiener'sche Taubersatz[129] ist sehr allgemein und kann folgendermaßen formuliert werden: *Seien* $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}, dt)$*, und sei* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *beschränkt. Für alle reellen* x *sei die Fourier–Transformierte*

$$\hat{f}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt \neq 0.$$

Aus der Faltungsgleichung

$$\lim_{x\to\infty} (f_1 * p)(x) \stackrel{def}{=} A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) dt$$

folgt dann

$$\lim_{x\to\infty} (f_2 * p)(x) = A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) dt.$$

Die Anwendung des Wiener'schen Taubersatzes ist etwas mühsam und ist z.B. in W. Schwarz ([56]) ausgeführt. Das Nichtverschwinden der Zetafunktion auf $\Re(s) = 1$ ist notwendig, um das [im Taubersatz verlangte] Nichtverschwinden der Fourier–Transformierten zeigen zu können.

– Beweise mit *elementaren* Methoden: P. Erdös, A. Selberg, 1948.[130] Ein Schlüssel zum elementaren Beweis ist die Selbergsche Formel

$$\vartheta(x) \cdot \log x + \sum_{p \leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right) \cdot \log p = 2x \log x + \mathcal{O}(x)$$

für $\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \log p$. Den Schluß auf $\vartheta(x)$ ermöglichen Tauber'sche Argumente unter Zuhilfenahme der *Schwankungsbedingung*

$$0 \leq \vartheta(z) - \vartheta(y) \leq 2(x - y) + o(z), \quad 1 \leq y < z \leq 2y.$$

[129] Norbert Wiener, 26.11. 1894, † 18.3.1964 in Stockhom. 1909 College–Abschluß, Studium der Biologie, dann Philosophie. Promotion 1912 mit Arbeit zur Logik. Dann Studium bei B. Russell in Cambridge (England). 1915 Privatdozent für Philosophie und Logik an der Harvard University in Cambridge (Mass.). Ab 1920 fest angestellt am Massachusetts Institute of Technology in Cambridge. Ab 1929 ao. Prof. Ab 1932 o. Professor. Schüler waren z.B. C. E. Shannon und N. Levinson. Beiträge zur mathematischen Logik, zur harmonischen Analysis, Operatorenrechnung, Potentialtheorie, Fourier–Transformation, Quantenmechanik, Brown'sche Bewegung. Wiener–Prozesse spielen in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine große Rolle. Ergodentheorie, Integralgleichungen, Theorie der optimalen Filter (von großer Bedeutung für die Nachrichtentechnik). 1948 erschien das Buch *Cybernetics*.

[130] Der Begriff *elementare Methoden* ist nicht sehr genau bestimmt. Gemeint ist, daß weder [komplizierte?] Methoden der Funktionentheorie noch der Fourier–Analysis verwendet werden sollen.

Varianten des elementaren Beweises sind dargestellt in den Lehrbüchern von Gelfond–Linnik, Hardy–Wright, Prachar, Specht, Trost, etc.
Einen Beweis unter Verwendung der isoperimetrischen Ungleichung gaben Th. Bang und [unabhängig] Eduard Wirsing (1962). Die elementaren Methoden erlaubten auch, mit geeigneten Konstanten $c > 0$ eine Formel mit Restglied,

$$\pi(x) = lix \cdot \left(1 + \mathcal{O}\left((\log x)^{-c}\right)\right)$$

zu beweisen.
Z.B. zeigten van d. Corput $c = 1/200$, Kuhn $c = 1/10$, Breusch $c = \frac{1}{6} - \varepsilon$, Wirsing $c = 3/4$, Dusumbetov $c = 1 - \varepsilon$. Die Gültigkeit für jedes beliebige $c > 0$ zeigten E. Bombieri und E. Wirsing um 1962/1964 [unabhängig] mit verschiedenen Methoden. Schließlich gewannen Diamond & Steinig (um 1972; man vgl. den schönen Übersichtsartikel [16] von H. Diamond) die asymptotische Formel

$$\pi(x) = li(x) + \mathcal{O}\left(x \exp\left(-\log^{\beta} x\right)\right),$$

wobei $\beta = 1/7 - \varepsilon$. Die Konstante β hat danach Sobirov noch auf $\frac{1}{6} - \varepsilon$ verbessert.

– Beweise mit Methoden der Fourier–Analysis (D. Helson, 1972). Mit dieser Methode kann auch das Restglied

$$\mathcal{O}\left(x(\log x)^{-c}\right), \text{ nicht aber [derzeit?]} \mathcal{O}\left(x \exp\left(-\log^{\beta} x\right)\right)$$

erzielt werden.

▷ Verbesserungen im Restglied des Primzahlsatzes. Dies beinhaltet eine Vergrößerung des nullstellenfreien Gebietes der Riemann'schen Zetafunktion. Solche Verbesserungen beruhen z. B. auf Abschätzungen von Exponentialsummen

$$\sum_{N<n\leq N_1} n^{it};$$

wobei $N_1 \leq 2N$ ist. Als Folgerung ergab sich das Restglied

$$\mathcal{O}\left(x \exp\left(-\sqrt{\log x \cdot \log\log x}\right)\right),$$

(J. E. Littlewood 1922 [Proc. London Math. Soc. (2) **20**, 1922], man sehe **8.2**, p. 73). Nach Zwischenstufen über Tschudakov, 1936, 1938, E. C. Titchmarsh, 1938, geht das beste Ergebnis auf I. M. Vinogradov und Korobov zurück, in der korrigierten Fassung von H. E. Richert.

$$\pi(x) = li(x) + \mathcal{O}\left(x \exp\left(-\frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{\frac{1}{5}}}\right)\right).$$

Bemerkenswert sind die numerischen Untersuchungen von B. Rosser, z.T. gemeinsam mit Schönfeld, z.B.

$$\frac{x}{\log x} < \pi(x) < \frac{x}{\log x - 2} \qquad \text{für } 17 \le x \le e^{100}, \quad x \ge e^{2000},$$

$$\frac{x}{\log x + 2} < \pi(x) < \frac{x}{\log x - 4} \qquad \text{für } x > 55,$$

und *die n–te Primzahl p_n erfüllt für alle $n \ge 1$*

$$p_n > n \cdot \log n.$$

▷ So wurde es wichtig, die Zetafunktion, ihre Wachstumseigenschaften und ihre Nullstellen zu studieren. Über die Zetafunktion gibt es nun einige große Monographien, von E. C. Titchmarsh (1951)[131], Edwards (1974), A. Ivić (1985), Karacuba und Voronin, und A. Laurinčikas. Daneben sind noch S. Patterson und D. Zagier zu erwähnen.

Studienobjekte sind z.B. folgende Fragen:

- Analytische Fortsetzung, Funktionalgleichung.
- Spezielle Werte der Zetafunktion: Euler wußte schon, daß

$$\zeta(2m) = \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}B_{2m}}{(2m)\,!}$$

  ist. Über die Werte an ungeraden ganzen Zahlen weiß man fast nichts; immerhin konnte R. Apery 1978 zeigen, daß $\zeta(3)$ irrational ist; einfachere und elegantere Beweise stammen von F. Beukers, 1979.[132]
- Approximative Funktionalgleichung. Ist $\zeta(s) = \chi(s) \cdot \zeta(1-s)$, und gilt $2\pi xy = |t|$, so gilt

$$\zeta(s) = \sum_{n<x} \frac{1}{n^s} + \chi(s) \cdot \sum_{n<y} \frac{1}{n^{1-s}} + \mathcal{O}\left(x^{-\sigma}\right) + \mathcal{O}\left(y^{\sigma-1}|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}\right).$$

- Ordnung im kritischen Streifen, d.h. eine [möglichst gute] Bestimmung des Exponenten $\xi(\sigma)$ in

$$\zeta(\sigma + it) = \mathcal{O}\left(|t|^{\xi(\sigma)}\right).$$

[131] Edward Charles Titchmarsh, * 1.6.1899 in Newbury (England), † 18.1.1963 in Oxford. Studierte in Oxford, keine Promotion, lehrte 1923–1929 am Univ. College in London, 1929–1931 in Liverpool und ab 1931 Prof. für Geometrie in Oxford. Titchmarsh war Analytiker und gab wichtige Beiträge zur Theorie der Fourier–Reihenm, Fourier–Integrale, zu Integralgleichungen, und komplexen Funktionenen einer Variablen. Titchmarsh beeinflußte die Entwicklung der Mathematik sowohl durch neue Ergebnisse wie auch durch die Systematisierung, Vereinfachung und Vereinheitlichung vorliegender Ergebnisse.

[132] Man vgl. A. van der Poorten, *A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, Math. Intelligencer **1**, 195–203 (1978/79).

Die LINDELÖFsche Vermutung,[133] die aus der RIEMANNschen Vermutung folgt, also schwächer als diese ist, besagt: in $0 < \sigma < 1$ gilt

$$\mu(\sigma) = \inf \xi(\sigma) = 0.$$

Hier sind Abschätzungen von Exponentialsummen wichtig. Z.B. (VAN DER CORPUT): Ist $f(x)$ reellwertig und zweimal differenzierbar, gilt

$$0 < \lambda_2 \leq f''(x) \leq h\lambda_2,$$

so ist

$$\sum_{a<n\leq b} e^{2\pi i f(n)} = \mathcal{O}\left(h(b-a)\lambda_2^{\frac{1}{2}}\right) + \mathcal{O}\left(\lambda_2^{-\frac{1}{2}}\right).$$

VINOGRADOVs Methode ermöglicht eine Abschätzung von

$$J(q,\ell) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S(q)|^{2\ell} d\alpha_1 \ldots d\alpha_k,$$

wobei

$$S(q) = \sum_{a<n\leq a+q} e^{2\pi i f(n)}, \qquad f(n) = \alpha_k n^k + \ldots + \alpha_1 n + \alpha_0.$$

– Ω–Sätze, d.h. Abschätzungen der Gestalt

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq c \cdot \psi(t)$$

für eine Folge von t–Werten, die gegen Unendlich strebt — wobei natürlich die Funktion ψ möglichst groß sein soll. Z.B.

$$\zeta(1 + it) = \Omega(\log\log t).$$

Dieselbe Abschätzung gilt auch für $\frac{1}{\zeta(1+it)}$ (BOHR & LANDAU).

– Mittelwertsätze ermöglichen asymptotische Formeln (für kleine k) oder wenigstens Abschätzungen für die Momente

$$\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt.$$

– Nullstellenverteilung der Zetafunktion, Nullstellen auf der kritischen Geraden, auch numerische Untersuchungen.

– Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der RIEMANNschen Vermutung.

[133] ERNST LEONARD LINDELÖF, 7. 3. 1870 – 4. 6. 1946, Helsinki. Wichtige Beiträge zur Analysis, Begründer der finnischen Funktionentheorie–Schule.

▷ Obere und untere Abschätzungen für Lücken zwischen aufeinanderfolgenden Primzahlen, sowie das Studium der Primzahlfunktion $\pi(x)$ in kurzen Intervallen. Der erste Satz dieser Art stammt von G. HOHEISEL, der 1930 zeigte, daß

$$p_{n+1} - p_n \ll p_n^{1-\delta} \qquad \text{mit } \delta = \frac{1}{33000}$$

ist. Der Wert von δ wurde in der Folgezeit bis in die Nähe von $\frac{1}{2}$ gedrückt. Zu nennen sind A. E. INGHAM, H. IWANIEC, R. HEATH–BROWN und J. PINTZ.

▷ Studium der analytischen Eigenschaften, Verteilung der Nullstellen, Abschätzung der Wachstumsordnung von DIRICHLETschen L–Funktionen, einschließlich der sogenannten *Dichtesätze*.[134]

▷ Definition allgemeinerer Zetafunktionen und Studium ihrer Eigenschaften (Meromorphie, Pole, Nullstellen, Funktionalgleichung, Produktdarstellung etc.).[135]

▷ Charakterisierung der RIEMANNschen Zetafunktion als meromorphe Funktion von endlichem Geschlecht, die als Dirichletreihe darstellbar ist und die eine Funktionalgleichung besitzt (HAMBURGER, 1922).

▷ Studium von Primzahlen in der arithmetischen Progression. (hierzu sehe man **7.5**, p. 64.)

▷ Verallgemeinerung des Primzahlsatzes auf algebraische Zahlkörper. (Primidealsatz, TSCHEBOTARËVs Dichtesatz).[136] Bezeichnet, für einen algebraischen Zahlkörper K, $\pi_K(x)$ die Anzahl der Primideale $\wp$ von K, deren Norm $N\wp \le x$ ist, so gilt

$$\pi_K(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

und es gelten entsprechende Formeln auch mit gewissen Restgliedern. Der erste Beweis stammt von LANDAU, später wurden durch HECKE[137] (ab 1917) die Übertragung der klassischen Methode von HADAMARD & DE LA VALLÉE–POUSSIN möglich.

Ist K/k eine Galois'sche Erweiterung mit der Galoisgruppe G, C eine Restklasse von G, und $M(C)$ die Menge aller Primideale $\wp$ von k, so daß der FROBENIUS–Automorphismus σ (dieser erfüllt $\sigma\alpha \equiv \alpha^{N\wp} \bmod \mathcal{P}$) für jedes $\mathcal{P}|\wp$ in C liegt. so hat $M(C)$ die Dichte

$$\lim_{s\to 1+} \sum_{\wp \in M(C)} \frac{1}{(N\wp)^s} = \frac{\#(C)}{\#(G)}.$$

[134]Diese besagen, daß in $\Re(s) > \frac{1}{2}$, $|t| \le T$, die Zeta–Funktion (und auch die L–Funktionen) „wenige" Nullstellen haben; die Abschätzungen werden für $\sigma \to \frac{1}{2}+$ [leider] immer weniger genau. Dichtesätze können in manchen Beweisen die Riemannsche Vermutung ersetzen. Man vgl. p. 66.

[135]Man sehe 63.

[136]N. G. TSCHEBOTARËV, 15. 6. 1894 – 2. 7. 1947, Professor an der Universität Kasan ab 1927.

[137]Man sehe **9**, 85.

▷ Primzahlen in arithmetischen Halbgruppen (A. Beurling,[138] J. E. Nyman, P. Malliavin, H. Diamond, J. Knopfmacher, K.–H. Indlekofer, R. Warlimont, W. Zhang). Ist G eine von abzählbar vielen Erzeugenden $p \in P$ erzeugte Halbgruppe mit einer Norm–Funktion $N : G \to [1, \infty[$, die multiplikativ ist und $\sum_{n \in G,\, N(n) \leq x} 1 \sim A \cdot \frac{x}{\log x}$ erfüllt, so gilt der Primzahlsatz. Entsprechende Ergebnisse können auch mit Restgliedern hergeleitet werden.

▷ Primzahlsatz von Pjateckii–Shapiro. Verteilung von Primzahlen in Folgen der Gestalt

$$[n^\alpha]\,,$$

wobei $1 \leq \alpha \leq \frac{10}{9}$ (G. Kolesnik), 1967. Verbesserungen durch Leitmann 1980, Heath–Brown 1983, Kolesnik 1985. A. Balog und G. Dufner behandelten Primzahlen in Folgen der Gestalt $[p^c]$.

▷ Asymptotische Ergebnisse über $\pi_r(x)$, die Anzahl der natürlichen Zahlen $n \leq x$, die aus genau r Primzahlen zusammengesetzt sind. Die ersten Ergebnisse stammen von Landau 1908, G. H. Hardy & S. Ramanujan 1917. Auch Untersuchung solcher Zahlen in der arithmetischen Progression wurden durchgeführt (z.B. von H.–E. Richert). Zur wichtigen Frage nach Formeln, die *gleichmäßig* in gewissen Bereichen von r gelten trugen P. Erdös, L. G. Sathe, A. Selberg, J.–L. Nicolas, A. Hildebrand und G. Tenenbaum bei.[139] Hierher gehört auch das Studium der Anzahl der $n \leq x$, die nur aus Primzahlen $p \leq y$ zusammengesetzt sind — wiederum gleichmäßig in möglichst großen Bereichen für y (N. G. de Bruijn, H. van Lint.

▷ Die Frage nach der Verteilung der Prim–k–tupel und von Primzahlen in Folgen $[f(n)]$, wobei z.B. f ein ganzwertiges Polynom ist, führte zur Entwicklung der Siebmethoden, die in einem eigenen Kapitel behandelt werden (man sehe **10**, p. 87).

▷ Allgemeinere Zetafunktionen.[140]

– Hurwitzsche Zetafunktion. Für $0 < a \leq 1$ sei

$$\zeta(s, a) = \sum_0^\infty \frac{1}{(n + a)^s}.$$

Diese Zetafunktion hat eine Funktionalgleichung, aber kein Euler–Produkt.

– Dirichletsche L–Reihen.

$$L(s, \chi) = \sum_1^\infty \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}.$$

[138] Arne Beurling, 3.2.1905 Göteborg, † 1986. Promotion 1933 Uppsala, dort o.Prof. 1937–1952, ab 1954 permanentes Mitglied des Institute for Advanced Study, Princeton. Einer der Mitbegründer der modernen Analysis. Spektraltheorie, Eigenwertverteilung, Randverhalten holomorpher Funktionen.

[139] Man vgl. den Überblicksartikel *On the number of prime factors of an integer* von A. Hildebrand, in Ramanujan Revisited, Urbana 1988, 167–185.

[140] Man sehe hierzu z.B. [19], **450**, p. 1694 ff.

Spezielle Werte sind z.B. im Falle $\chi(-1) = 1$:

$$L(2n,\chi) = \frac{(-1)^n}{(2n)\,!} \cdot \left(\frac{2\pi}{f}\right)^{2n} \tau(\chi) \cdot \left(-B_{\chi,2n}\right),$$

mit der GAUSSschen Summe

$$\tau(\chi) = \sum_{n \bmod f} \chi(n) \cdot \zeta_f^n .$$

- LERCHsche Zetafunktionen, EPSTEINsche Zetafunktionen.
- DEDEKINDsche Zetafunktionen algebraischer Zahlköprer.
- HECKEsche Zetafunktionen, mit Größencharakteren.
- ARTINsche L–Funktionen, [A.] WEILsche L–Funktionen.
- Zetafunktionen algebraischer Varietäten über endlichen Körpern. Die WEILschen Vermutungen hierfür sind vollständig bewiesen worden, einschließlich der entsprechenden Riemann'schen Vermutung (DWORK, P. DELIGNE).
- L–Funktionen elliptischer Kurven (mit den Vermutungen von SWINNERTON – DYER und TANIYAMA – WEIL – SHIMURA). Der Beweis der letztgenannten Vermutung für die speziellere Klasse der „semi–stabilen“ elliptischen Kurven durch A. WILES ermöglichte den Beweis der FERMATschen Vermutung.

7.5 Primzahlen in der Progression

Analytic number theory may be said to begin with the work of Dirichlet, and in particular with Dirichlet's memoir of 1837 on the existence of primes in a given arithmetic progression.[141]

DIRICHLET zeigte 1837, 1839, daß — für $(a,q) = 1$ —

$$\pi(x;q,a) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \bmod q}} 1 \to \infty$$

strebt für $x \to \infty$. Hierzu führte er DIRICHLET–Charakter χ und L–Reihen

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)$$

ein. Logarithmieren und Summation über die Charaktere gibt

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \overline{\chi}(a) \log L(s,\chi) = \sum_{\substack{p \\ p^m \equiv a \bmod q}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}} = \sum_{p \equiv a \bmod q} \frac{1}{p^s} + \mathcal{O}\,(1)$$

[141] Davenport, Multiplicative Number Theory, p.1. ([15]). — Zur Bedeutung von DIRICHLETs Arbeit[en] vgl. man SCHWARZ [62].

für $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Für $s \to 1$ stebt $|L(s, \chi_0)| \to \infty$, also strebt die linke Seite gegen Unendlich, wenn $L(1, \chi) \neq 0$ für alle $\chi \neq \chi_0$ gezeigt werden kann.
DIRICHLET erreichte diese Aussage nur auf einem großen Umweg. Er stellte die Klassenzahl geeigneter quadratischer Zahlkörper als Produkt über die Werte $L(1, \chi)$, $\chi \neq \chi_0$ (und einer Konstanten $\neq 0$, die aus Körperkonstanten [Diskriminante, Regulator, ...] gebildet wird) dar:

$$h = \frac{w\sqrt{|D|}}{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}R} \cdot V(1) \cdot \prod_{\chi \neq \chi_0} L(1, \chi).$$

Dies impliziert das Nichtverschwinden der Werte $L(1, \chi)$ und damit

$$\pi(x; q, a) \to \infty \text{ für } x \to \infty.$$

DIRICHLETs Satz gibt keine asymptotische Aussage für $\pi(x; q, a)$. Der [viel schärfere] Primzahlsatz für die arithmetische Progression (mit Restglied)

$$\pi(x; q, a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot li(x) + \mathcal{O}\left(x \exp\left(-c \cdot \sqrt{\log x}\right)\right)$$

wurde erst 1896 von DE LA VALLÉE–POUSSIN bewiesen. Hierbei kann die $\mathcal{O}$–Konstante von a und q abhängen.
Eine der Schwierigkeiten war, daß man nicht ausschließen kann, daß L–Reihen mit reellen Charakteren eine reelle Nullstelle $s < 1$ sehr nahe bei 1 haben können.[142]
Erst 1934 konnte C. L. SIEGEL zeigen, daß die vielleicht existierende Ausnahmenullstelle einer L–Reihe modulo q einen gewissen Minimalabstand [der von q abhängen kann] von 1 besitzt.

> *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine (ineffektive) Konstante $q_0(\varepsilon)$, so daß für jeden reellen (primitiven) Charakter χ ($\neq \chi_0$) modulo q gilt:*
>
> $$L(s, \chi) \neq 0 \text{ in } 1 - q^{-\varepsilon} \leq s \leq 1,$$
>
> *falls $q \geq q_0(\varepsilon)$.*

Hieraus folgt der Primzahlsatz von PAGE–SIEGEL–WALFISZ:

> *Sei $A > 0$ fest gegeben. Gleichmäßig für alle $q \leq \log^A x$ und alle a, $ggT(q, a) = 1$, gilt*
>
> $$\pi(x; q, a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot li(x) + \mathcal{O}\left(x \exp\left(-c\sqrt{\log x}\right)\right).$$

Läßt man gewisse Moduln außer Acht, so ergeben sich Verschärfungen, z.B der Primzahlsatz von RODOSSKII – TATUZAWA:

[142] Wenn die Große Riemann'sche Vermutung richtig ist, kann es natürlich keine solche „Ausnahme–Nullstelle“ geben.

Gleichmäßig in $q \le \exp\left(c_0 \cdot \frac{\log x}{\log\log x}\right)$ mit möglicher Ausnahme der q, die Vielfache eines einzigen $q^* = q^*(x) > \log^A x$ sind, gilt

$$\pi(x;q,a) = \frac{1}{\varphi(k)} \cdot \frac{x}{\log x} \cdot \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log x}\right)\right).$$

Mit Hilfe von Siebmethoden läßt sich die Anzahl $\pi(x;q,a)$ wenigstens nach oben auch für große Moduln abschätzen. Nach Vorstufen von Viggo Brun erzielten schließlich H. L. Montgomery und R. Vaughan 1973 das bis heute beste Ergebnis:
Für alle $q < x$ und alle zu q teilerfremden a gilt

$$\pi(x;q,a) < \frac{2}{\varphi(q)} \cdot \frac{x}{\log \frac{x}{q}}.$$

Die Abweichung von $\pi(x,q,a)$ vom erwarteten Wert beschreibt der Primzahlsatz von Bombieri–Vinogradov (um 1965) im Mittel.[143]

Zu jedem $A > 0$ gibt es ein $B > 0$ derart, daß

$$\sum_{q \le x \log^{-B}} \quad \max_{a,(a,q)=1} \max_{y \le x} \left|\pi(y;q,a) - \frac{1}{\varphi(q)} \cdot li(y)\right| = \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^A(x)}\right)$$

ist.

Dieser Primzahlsatz hat wichtige Anwendungen in der additiven Primzahltheorie (Darstellung von n in der Gestalt $n = p + x^2 + y^2$) und beim Titchmarshschen Teilerproblem (asymptotische Auswertung von $\sum_{p \le x} \tau(p-1)$). Das erste Problem wurde durch C. Hooley 1957 gelöst, unter Annahme der Richtigkeit der großen Riemann'schen Vermutung. Der Primzahlsatz von Bombieri–Vinogradov erlaubt, diese unbewiesene Vermutung zu entfernen, das man nur eine Abschätzung des Restgliedes im Mittel benötigt. Dies haben P. Elliott & H. Halberstam (Mathematica 13, 1966) ausgeführt.

Die Artinsche Vermutung besagt: Ist $a \ne 0, \pm 1$ und kein Quadrat, so ist a eine primitive Kongruenzwurzel modulo p für unendlich viele Primzahlen p. Diese wurde durch C. Hooley (Crelle 225, 1967) bewiesen unter Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung für Dedekindsche Zetafunktionen in gewissen algebraischen Zahlkörpern.
Gäbe es einen Bombieri–Vinogradovschen Primzahlsatz in algebraischen Zahlkörpern, so könnte die unbewiesene Riemannsche Vermutung aus dem Hooleyschen Beweis entfernt werden.

Dichtesätze für Nullstellen von L–Reihen, etwa

$$\sum_{\chi \bmod Q} N(\alpha, T, \chi) \ll (QT)^{c\cdot(1-\alpha)},$$

[143] Die Abschätzung ist i.w. genau so gut wie die aus der Großen Riemannschen Vermutung folgende.

$$\sum_{q \le Q} \sum_{\chi \bmod q} N(\alpha, T, \chi) \ll (QT)^{c\cdot(1-\alpha)}.$$

gehen auf GALLAGHER, MONTGOMERY, RÉNYI u.a. zurück. Diese haben z.B. Bedeutung für die Abschätzung der kleinsten Primzahl p in einer arithmetischen Progression:

$$p_{\min;q,a} \ll q^L.$$

Das erste Ergebnis dieser Art erzielte YU. V. LINNIK 1947. Die Konstante L wurde schrittweise verkleinert auf

$L = 80$	M. JUTILA	Math. Scand. 41 (1977)
$L = 36$	S. GRAHAM	
$L = 17$	CHEN JING RUN	Sci. Sinica 20 (1977), 22 (1978)

Literatur hierzu: z.B. MONTGOMERY, Topics in Multiplicative Number Theory, 1971.

7.5.1 C. L. Siegel, 1896–1981

* 31. 12. 1896, Berlin, † 4. April 1981, Göttingen.
Zum WS 1915/16 Studium der Astronomie in Berlin, dann Wechsel zur Mathematik. Promotion bei E. LANDAU am 9. 6. 1920. Lehrbeauftragter in Hamburg im WS 1920/21, dann Wiss. Assistent bei R. COURANT in Göttingen. Habilitation 10. 12. 1921 in Göttingen. Zum 1. 8. 1922 (knapp 26–jährig) wurde SIEGEL ordentlicher Professor in Frankfurt als Nachfolger von A. SCHOENFLIES. Im SS 1930 war SIEGEL Gastprofessor in Göttingen, 1935 erfolgte ein Gastaufenthalt in den USA (vom 1. 1. 1935 bis Ende SS 1935 nach Princeton beurlaubt; Vertretung durch Doz. Dr. WERNER WEBER aus Göttingen). SIEGEL verließ Frankfurt am 1. 1. 1938 und wurde Professor in Göttingen. Im Frühjahr 1940 erfolgte die Emigration nach den USA, bis 1945 Forschungsstipendium am Institute for Advanced Study, Princeton; 1945 – 1951 war SIEGEL dort in fester Stellung. Gastprofessor in Göttingen im WS 1946/47.
Seit 1951 war SIEGEL wieder oProf. in Göttingen. Die Emeritierung erfolgte zum 1. 4. 1959, im Alter von 62 Jahren; dies war möglich geworden durch eine geschickte Kombination verschiedener Regelungen des Beamtenrechts, die danach sofort gesetzlich unmöglich gemacht wurde; Emeritierung ist nur mit 65 Jahren (oder später) möglich, mit 62 ist nur Pensionierung möglich.
Viermal gab SIEGEL Gastvorlesungen am Tata–Institut in Bombay.[144] 1963 erhielt er den Orden Pour le Mérite. 1964 Großes Verdienstkreuz mit Stern, 1978 Preisträger der Wolf Foundation (gemeinsam mit IZRAIL M. GELFAND. Es handelte sich hierbei um die erstmalige Preisverleihung in Mathematik. Den Preis der Wolf Foundation erhielten später noch (aus dem deutschsprachigen Raum) F. HIRZEBRUCH (1988), 1994/95 JÜRGEN K. MOSER (Schweiz)).
Zum Frankfurter Schülerkreis von SIEGEL gehörten THEODOR SCHNEIDER, WILHELM MAIER, KURT MAHLER und HELENE BRAUN. In Göttingen waren u.a. H. KLINGEN und H. RÜSSMANN Schüler von SIEGEL.

[144]Das Tata–Institut wurde durch eine Stiftung der sehr reichen indischen Familie Tata ermöglicht; Zweck war, vielversprechende indische Nachwuchsmathematiker nach Kräften zu fördern, um sie dann im Lande einsetzen zu können.

SIEGEL entdeckte tiefliegende Sätze über Automorphe Funktionen (SIEGELsche Modul–Funktionen), über Quadratische Formen,[145] zur Geometrie der Zahlen und in der Himmelsmechanik. Er arbeitete dort z.B. zum restringierten Dreikörperproblem, zum Problem der „Kleinen Nenner“, und er setzte sich mit dem Verhalten der Lösungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung auseinander.
In der Zahlentheorie befaßte er sich um 1920 mit Approximationseigenschaften algebraischer Zahlen (Satz von SIEGEL–THUE–ROTH):

Ist α algebraisch vom Grade $n > 1$, so gibt es eine Konstante $c(\alpha, \kappa) > 0$ derart daß für alle rationalen Zahln $\frac{a}{q}$, $q > 0$ gilt

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \geq \frac{c}{q^{\kappa}}.$$

Dabei kann κ gewählt werden als

$\kappa = n$	LIOUVILLE *1844*
$\kappa = \frac{1}{2}n + 1 + \varepsilon$	A. THUE *1909*
$\kappa = \min\limits_{s\in\mathbb{N}} \left(s + \frac{n}{s+1} + \varepsilon\right)$	SIEGEL *1921*
$\kappa = \sqrt{2n} + \varepsilon$	DYSON *1947*
$\kappa = 2 + \varepsilon$	K. F. ROTH *1955*

ROTHs Ergebnis ist bestmöglich. Aus SIEGELs Ergebnis folgt insbesondere, daß $\kappa = 2\sqrt{n} + \varepsilon$ gewählt werden kann.
Weiter schuf SIEGEL die Grundlagen der additiven Zahlentheorie in algebraischen Zahlkörpern. Er beschäftigte sich in einer wegweisenden Arbeit 1929 (Abhandl. Preuß. Akad. d. Wiss.) mit Transzendenzuntersuchungen bei Bessel– und E–Funktionen

$$E(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n!} z^n,$$

wobei dei a_n einem festen algebraischen Zahlkörper entstammen, so daß für eine geeignete Folge $b_n \ll n^{\epsilon n}$ die Zahlen $a_n b_n$ ganz sind und mit allen Konjugierten ebenfalls $\ll n^{\epsilon n}$ sind. Beispiele für E–Funktionen sind die Exponentialfunktion und die normierten Bessel–Funktionen

$$K_\lambda(z) = \Gamma(\lambda+1)\left(\frac{1}{2}z\right)^{-\lambda} J_\lambda(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}z\right)^{2n}}{n!(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)}.$$

Ebenso ist jede hypergeometrische Funktion

$$\sum_0^\infty \frac{[\alpha_1, n]\cdots[\alpha_\ell, n]}{[\beta_1, n]\cdots[\beta_m, n]} z^{kn},$$

wobei $k = m - \ell$ und $[\gamma, n] = \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)$ ist, eine E–Funktion. Weiterhin müssen die E–Funktionen einer Differentialgleichung erster oder zweiter Ordnung genügen. SHIDLOWSKI konnte 1954 diese Voraussetzung weitgehend abschwächen, und der Satz von SIEGEL – SHIDLOWSKI lautet.

[145] Er entwickelte z.B. maßtheoretische Methoden in der Theorie der quadratischen Formen.

Sind $E_1(x), \ldots, E_n(x)$ E–Funktionen, die einem System von homogenen linearen Differentialgleichungen

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x) y_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

genügen, wobei die f_{ij} rationale Funktionen von x sind und die Koeffizienten alles E–Funktionen und aller F_{ij} in einem festen algebraischen Zahlkörper K liegen. Sind weiter die Funktionen

$$E_1(x), \ldots, E_n(x)$$

algebraisch unabhängig über $K(x)$, dann sind für jede algebraische Zahl $\alpha \neq 0$, die von den Polen der f_{ij} verschieden sind, die Zahlen

$$E_1(\alpha), \ldots, E_n(\alpha)$$

algebraisch unabhängig (und insbesondere transzendent).

Weiter beschäftigte sich Siegel mit ganzzahligen Lösungen diophantischer Gleichungen:

Definiert g(x,y)=0 eine Kurve vom Geschlecht $g > 1$, so gibt es nur endlich viele ganzzahlige Lösungen (1929).

Die Mordellsche Vermutung, daß es nur endlich viele rationale Lösungen gäbe, wurde erst 1983 durch Faltings bewiesen. Zum zahlentheoretischen Werk von Siegel sehe man Schneider, [54], die Beiträge zur Funktionentheorie behandelten Klingen ([34]) und die Beiträge zur Himmelsmechanik Rüssmann ([52]).
Charakteristisch für die Schwierigkeiten, mit denen sich Wissenschaftler in der Zeit des Dritten Reiches auseinandersetzen mußten, ist die folgende Episode.

Vom 20. 5. – 6. 6. 1937 hält Siegel (mit Genehmigung) Vorlesungen an der Sorbonne und am Collége de France in *französischer* Sprache, was von den damaligen Machthabern wohl nur sehr ungern gesehen wurde. Für die Reise standen keine Devisen zur Verfügung. Siegel berichtet pflichtgemäß an den Frankfurter Rektor, daß ein französischer Kollege ihm hilfreich Geld geliehen hätte und daß er seine Besuche bei der Deutschen Auslandsvertretung und der Pariser Zweigstelle des DAAD ausgeführt habe. *„Dagegen konnte ich zu meinem größten Bedauern den Pariser Leiter der Auslandsstelle der NSDAP ... nicht erreichen, da die Sprechstunden dieses Herrn in die Zeit meiner Vorlesungen und wissenschaftlichen Besprechungen fielen. ...“* Anscheinend hat es Siegel darauf angelegt, aus dem Dienst entfernt zu werden (insbesondere später in Göttingen mit einem Brief an den Polizeipräsidenten), doch konnte er sich anscheinend als international hochangesehener Wissenschaftler einige Provokationen leisten.

Aus W. HARTNER (1981) sei folgende Anekdote zitiert. *„1928 hielt Siegel, berühmt durch die Meisterschaft seines Vortrages, eine ungemein schwierige Vorlesung über Himmelsmechanik, die später in Buchform erschienen ist. Um Unerwünschte abzuschrecken, hatte er sie auf eine prohibitive Zeit: morgens von 7–8 Uhr, gelegt, mit dem Erfolg, daß er in der Tat nur vier feste Hörer hatte: außer Hermann Dänzer (später Professor für Angewandte Physik in Frankfurt) und mir [Hartner] den damals schon berühmten André Weil, und den nicht minder illustren Privatdozenten und Mitarbeiter von Einstein, Cornelius Lánczos .... Wir kamen alle zusammen eines Morgens aus nicht mehr rekonstruierbaren Gründen 1o Minuten zu spät ... und fanden Siegel an der bereits mit Formeln beschriebenen Tafel vor leerem Auditorium dozierend .... “*

7.5.2 A. Walfisz

ARNOLD Z. WALFISZ, * 1892, † 29. Mai 1962, Tiflis. Von WALFISZ stammt eine Monographie über *Gitterpunkte in Ellipsoiden* und eine Monographie *Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, Berlin 1963, in der sowohl die Abschätzung[146]

$$\sum_{n \le x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} \cdot x^2 + \mathcal{O}\left(x \log^{\frac{2}{3}} x \cdot (\log\log x)^{\frac{4}{3}}\right)$$

wie auch das bisher beste bekannte nullstellenfreie Gebiet für die Zetafunktion bewiesen werden.

7.5.3 Viggo Brun, 1885–1978

VIGGO BRUN, * 13. 10. 1885 Lier (Norwegen), † 15. 8. 1978 Drobak (bei Oslo). Studium 1903–1909 in Oslo, 1910 in Göttingen, 1919/1920 in Paris. 1921–1923 Assistent, 1923 Prof. Univ. Trondheim, 1946–1956 Prof. Univ. Oslo.
Entwicklung der BRUNschen Siebmethode um 1915 bis 1920, als Fortentwicklung des Siebes des ERATOSTHENES durch Einsatz kombinatorischer Ideen. Anwendung der Siebmethode beim Goldbach'schen Problem (gerade Zahlen sind darstellbar als $n = P_a + P_b$, wobei P_a eine Zahl mit höchstens a Primfaktoren bezeichnet; hier ist $a = b = 7$. Ebenso entsprechende Ergebnisse beim Problem der Primzahlzwillinge. Weiterhin erlaubte die Siebmethode, die Anzahl $\pi(x; q, a)$ nach oben abzuschätzen: Für $q < x$ ist[147]

$$\pi(x; q, a) \le C \cdot \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \frac{x}{\log \frac{x}{q}}.$$

BRUNs bedeutendster Schüler ist A. SELBERG.

[146] Das Restglied $\mathcal{O}(x \log x)$ wäre fast trivial zu erhalten; die gegebene, anscheinend geringfügige Verbesserung erfordert aufwendigste analytisch–zahlentheoretische Technik.

[147] Man sehe auch H. MONTGOMERY, *Topis in Multiplicative Number Theory.* Man sehe auch p. 66.

7.5.4 A. Selberg, 1917–

* 14. 6. 1917 Langesund, Norwegen, Sohn eines Osloer Mathematik–Professors.[148] Studium in Oslo, insbesondere bei V. Brun. Promotion 1943, ab 1947 in den USA, am Institute for Advanced Study in Princeton, dort ab 1952 oProf. 1948 elementarer Beweis des Primzahlsatzes, Fields–Medaille. Später auch Preisträger der Wolf Foundation.
Arbeitsgebiet: Zahlentheorie, diskrete Gruppen, automorphe Funktionen. Studium von Beziehungen zwischen zahlentheoretischen Problemen und Darstellungen von Gruppen. Selbergsche Spurformel. 1942 zeigte er: auf $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ liegen $\geq c \cdot T \log T$ Nullstellen der Riemann'schen Zetafunktion, d.h. ein echter Bruchteil der Nullstellen liegt auf der kritischen Geraden (man vgl. hierzu p. 41). Entwicklung der Selbergschen Siebmethode, die gegenüber der Brun'schen erheblich einfacher handzuhaben ist — auch der Beweis ist viel einfacher. Die Selbergsche Siebmethode ermöglichte Verschärfungen bei den Ergebnissen über Primzahlzwillinge und der Darstellung gerader Zahlen $n = P_a + P_b$, mit $a = b = 3$ 1956 (A. I. Vinogradov, aber erst durch H.–E. Richert und H. Halberstam in eine lesbare Form gebracht). Die Selbergsche Siebmethode ermöglicht, $a = b = 3$ zu erreichen. Unter Verwendung des Bombieri–Vinogradovschen Primzahlsatzes kann $a = 1, b = 3$ erreicht werden (man vgl. Halberstam – Richert, Sieve Methods). Schließlich erzielte Chen Jing Run 1973 das Ergebnis $a = 1, b = 2$, die bisher beste „Approximation“ an einen Beweis der binären Goldbach–Vermutung.
Lit: Notices AMS 33, 1986, 311. Gesammelte Werke.

7.5.5 L. J. Mordell, 1888 – 1972

L. J. Mordell, * 28. 1. 1888 Philadelphia USA, † 12.3.1972, Cambridge/England. 1923–1945 Prof. Manchester, ab 1945 – 1953 in Cambridge. Der *„König der diophantischen Gleichungen“* verfaßte ca. 200 Arbeiten zu diophantischen Gleichungen, Thetafunktionen, Modulfunktionen, Geometrie der Zahlen, Exponentialsummen. Ein wichtiges Ergebnis:

$$y^2 = x^3 + k \text{ hat für jedes } k \neq 0 \text{ nur endlich viele ganzzahlige Lösungen.}$$

Zur Mordellschen Vermutung

auf einer algebraischen Kurve vom Geschlecht $g > 1$
liegen höchstens endlich viele rationale Punkte

vgl. man p. 69 und p. 20 und [62].

[148] Ole Selberg, 1877–1950.

8 Additive Zahlentheorie, Hardy, Littlewood, Ramanujan

8.1 G. H. Hardy, 1877 – 1947

Godefrey Harold Hardy, * 7.2.1877, † 1. 12. 1947 Cambridge (Engl.), 1906–1919 oProf. für Mathematik in Cambridge, 1919–1931 in Oxford, dann wieder in Cambridge bis 1942. Er war befreundet mit B. Russell. Hardy hat etwa 300 Arbeiten verfaßt.

- ▷ Analysis. Probleme der Integralrechnung, Monographien über *The integration of functions of a single variable* und *A course of pure mathematics.*

- ▷ Unendliche Reihen, Fourierreihen. Monographien über *The general theory of Dirichlet series*, gemeinsam mit M. Riesz, *Fourier Series*, gemeinsam mit W. W. Rogosinski, *Divergent Series*, Oxford 1949 – zur Theorie der Summierbarkeit. Taubersatz von Hardy–Littlewood, Hardy–Littlewoodsches Kriterium für die Konvergenz von Fourierreihen.

- ▷ *Inequalities*, gemeinsam mit Littlewood und G. Pólya, Cambridge 1934.

- ▷ Asymptotische Entwicklungen der Lösungen von Differentialgleichungen der Gestalt
$$\frac{du}{dt} = \frac{P(u,t)}{Q(u,t)}, \text{ wobei } P, Q \text{ Polynome sind.}$$
(Satz von Hardy).

- ▷ Analytische Zahlentheorie. Auf $\Re(s) = \frac{1}{2}$ liegen $\geq c \cdot T$ Nullstellen der Zetafunktion mit $0 < \Im(\rho) \leq T$. Entdecker der approximativen Funktionalgleichung der Zetafunktion.

- ▷ In der additiven Zahlentheorie entscheidend neue Beiträge zum Waringschen Problem und zum Goldbachschen Problem, i.a. gemeinsam mit J. E. Littlewood. Zusammen mit S. Ramanujan, den Hardy nachhaltig förderte, gewichtige Beiträge zur Theorie der Partitionen. Es gilt die asymptotische Formel (Hardy & Ramanujan, 1917)
$$p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left(\frac{\exp(C\lambda_n)}{\lambda_n} \right) + \mathcal{O}\left(\exp(D\sqrt{n})\right),$$
wobei
$$\lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}, \quad C = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad D > \frac{1}{2}C.$$
für die durch
$$\sum p(n) z^n = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - z^m)^{-1}$$
definierbare Partitionenfunktion $p(n)$. Diese wurde später durch Rademacher (1937, 1943) zu einer konvergenten Reihendarstellung verfeinert.

Sowohl beim Partitionenproblem wie auch beim WARING–Problem schufen HARDY & RAMANUJAN bzw. LITTLEWOOD eine völlig neue Methode, die HARDY–LITTLEWOODsche Kreismethode, die auch heute noch bei Problemen der additiven Zahlentheorie eine ganz wichtige Rolle spielt.

- ▷ Bei Gitterpunktproblemen gilt für die Gitterpunkte im Kreis die HARDY–LANDAUsche Identität.

- ▷ Verfasser eines sehr einflußreichen Lehrbuchs *An introduction to the theory of numbers*, gemeinsam mit E. WRIGHT.

8.2 J. E. Littlewood, 1885–1977

JOHN EDENSOR LITTLEWOOD, * 9.6.1885, † 6.9.1977. Studium 1903–1907 am Trinity College in Cambridge, ab 1920 – 1950 Professor am Trinity College. Fruchtbare Zusammenarbeit mit HARDY ab 1911. Durch diese Zusammenarbeit waren die wichtigsten Arbeitsgebiete die analytische Zahlentheorie und die Analysis, z.B. Taubersätze — übrigens, der Name wurde von HARDY und LITTLEWOOD zu Ehren TAUBERs gegeben.[149] Ungleichungen der klassischen Analysis, HARDY–LITTLEWOODsche Methode bei Fragen der additiven Zahlentheorie. Konvergenzprobleme bei Fourierreihen, Dirichletreihen. LITTLEWOOD widerlegte die Vermutung

$$\pi(x) < li(x).$$

8.3 S. Ramanujan, 1887– 1920

SRINIVASAN RAMANUJAN, * 22. 12. 1887 Erode (Südindien), † 26. 4. 1920 Madras (an Tbc). RAMANUJAN besuchte die höhere Schule in Kumbakonam, war ein kleiner Postbeamter, Autodidakt in Mathematik. Erste Publikation 1911; insgesamt 38 Arbeiten, davon 7 gemeinsam mit HARDY. 1913 Korrespondenz mit G. H. HARDY, der RAMANUJANs Genie erkannte und ihn nach England einlud. Ab 1914 Aufenthalt am Trinity College in Cambridge, Zusammenarbeit mit HARDY. Rückkehr nach Indien aus gesundheitlichen Gründen.
RAMANUJAN hatte wenig mathematischen Hintergrund, aber ein ausgezeichnetes Gedächtnis, Rechenfertigkeit, Geduld zur Durchführung komplizierter Rechnungen. Er beschäftigte mit seinen meist richtigen Vermutungen Generationen von Zahlentheoretikern (z.B. wurden die Ergebnisse seiner Notebooks [auch das "lost notebook" tauchte schließlich wieder auf] von BRUCE BERNDT, G. ANDREWS und vielen anderen schließlich streng bewiesen). 1987 fand in Urbana eine Gedenkkonferenz aus Anlaß seines 100. Geburtstages statt.
RAMANUJAN erzielte wichtige Ergebnisse und Vermutungen zur

[149] ALFRED TAUBER, * 5. 11. 1866 Preßburg/Bratislava. † 26. 7. 1942 KZ Theresienstadt. 1888 Promotion, 1891 Habilitation in Wien über Potenzreihen. Vorlesungen zur Versicherungsmathematik. 1908 ao.Prof. Univ. Wien. 1933 Ruhestand, hielt Vorlesungen bis 1938. Deportation 28. 6. 1942. [Im März 1938 erfolgte der Einmarsch deutscher Truppen nach Österreich.]
1897 Umkehrproblem zum Satz von ABEL, Einführung Tauber'scher Bedingungen. Arbeiten zur Lösung linearer Differentialgleichungen, zur Gammafunktion, Versicherungsmathematik.

- ▷ Theorie der Partitionen (Partitionenformel, gemeinsam mit G. HARDY); Kongruenzwerte für die Partitionenfunktion.
- ▷ Asymptotische Formeln für eine Vielzahl zahlentheoretischer Funktionen, z.B. für `highly composite numbers` (das sind lokale Maxima der Teilerfunktion).
- ▷ Theorie der elliptischen Funktionen.
- ▷ Theorie der Kettenbrüche.

Literatur: Am. Math. Monthly 44 (1937), 137–155.
G. H. HARDY, Ramanujan – Twelve Lectures on his life and work, Cambridge 1940.
BERNDT et al., Urbana Conference Band 1987.

8.4 Waring–Problem

Edward Waring[150] warf folgendes Problem auf.

> **Problem**. *Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert eine kleinste Zahl $g(k)$ und eine kleinste Zahl $G(k)$ derart, daß jede natürliche Zahl n eine Summe von $s \leq g(k)$ k–ten Potenzen ist,*
> $$n = x_1^k + \ldots + x_s^k,$$
> *bzw. jede hinreichend große natürliche Zahl eine Summe von $s \leq G(k)$ k–ten Potenzen ist.*

Das *"Easier Waring problem"* verlangt den Beweis der folgenden Behauptung. Zu k existiert ein $E(k)$, derart daß

$$n = \pm x_1^k \pm \ldots \pm x_s^k,$$

wobei $s \leq E(k)$.

LAGRANGE bewies 1770, gestützt auf Vorarbeiten von L. EULER, den 4–Quadratesatz, d.h. $g(2) = 4$.[151] HURWITZ[152] zeigte: aus der Richtigkeit für k folgt die Richtigkeit für $2k$. Durch schwierige kombinatorische Überlegungen, die auf gewissen algebraischen Identitäten basieren, zeigte D. HILBERT 1909 die Richtigkeit der WARINGschen

[150]* 1734 bei Shrewsbury, † 15. 8. 1798 bei Shrewsbury. Studierte in Cambridge und wurde dort 1760 oProf. Buchveröffentlichungen „Meditationes algebraicae“ 1770, „Meditationes analyticae“, 1776. Darstellung der Potenzsummen $\alpha_1^k + \ldots + \alpha_n^k$ der Nullstellen eines Polynoms (WARING–NEWTONsche Formeln), Näherungsverfahren zur Nullstellenbestimmung (Graeffe–Verfahren), Verallgemeinerung des Rolle'schen Satzes. Behauptet 1770, daß jede natürliche Zahl Summe von höchstens 9 Kubizahlen oder 19 Biquadraten ist, etc.

[151]Dieser Satz wurde von BACHET 1621 formuliert, P. FERMAT behauptete, ihn beweisen zu können.

[152]ADOLF HURWITZ, * 26. 3. 1859 Hildesheim, † 18. 11. 1919 in Zürich. Studium 1877–1881 in München, Berlin und Leipzig, Prom. 1881. 1882 Privatdozent U. Göttingen, 1884 a.o.Prof. Königsberg, 1892 ETH Zürich. Untersuchungen zur Analysis, Funktionentheorie, $2n$–fach periodische Funktionen, elliptische Funktionen, Kettenbrüche (Satz von Hurwitz), Riemann'sche Flächen, diophantische Gleichungen.

Behauptung. Seine Methode erlaubt auch, $g(k)$ nach oben abzuschätzen; dies hat allerdings erst G. J. RIEGER 1953 ausgeführt, das Ergebnis ist sehr dürftig (im Vergleich zu dem Ergebnis, das aus der [erst ca. 15 Jahre später entwickelten] HARDY–LITTLEWOODschen Methode folgt).

$$g(k) < (2k+1)^{260(k+3)^{3k+8}}.$$

Der HILBERTsche Beweis wurde durch REMAK 1912 und STRIDSBERG 1916 vereinfacht. E. KAMKE ersetzte 1921 k–te Potenzen durch „Werte eines Polynoms mit ganzen Koeffizienten vom k–ten Grade".
Zur unteren Abschätzung von $g(k)$ sei folgendes bemerkt: Die ganze Zahl

$$n = 2^k \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] - 1$$

ist $< 3^k$, kann also nur durch Potenzen von 2 und 1 dargestellt werden.. Am wenigstens Summanden werden benötigt mit $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] - 1$ Potenzen von 2 und $2^k - 1$ Potenzen von 1, also ist

$$g(k) \geq 2^k + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] - 2.$$

Dies ist vermutlich der richtige Werte für $g(k)$ (?). Für $k \neq 4$ wurde gezeigt: Ist

$$2^k \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^k\right\} + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] \leq 2^k,$$

so ist

$$g(k) = 2^k + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] - 2.$$

Ausnahmen sind nicht bekannt, aber obige Bedingung ist bisher nicht bewiesen worden. K. MAHLER zeigte 1957, daß obige Bedingung für alle k bis auf endlich viele Ausnahmen erfüllt ist (allerdings ineffektiv). Frau STEMMLER zeigte 1964 (mit Computerhilfe), daß obige Bedingung für alle $k \leq 200000$ erfüllt ist.
Für $k = 4$ zeigte THOMAS 1974, daß $g(4) \leq 22$ ist; für $n < 10^{310}$ oder $n > 10^{1409}$ ist n eine Summe von höchstens 19 Biquadraten. Es verbleibt also ein „mittlerer" Bereich, in dem die Darstellbarkeit von n durch wenige Biquadrate noch nicht klar ist. BALASUBRAMANIAN zeigte um 1982, daß $g(4) \leq 21$ ist. Das Problem wurde schließlich um 1985 durch J. M. DESHOUILLERS (mit F. DRESS und BALASUBRAMANIAN) gelöst, $g(4) = 19$, indem mit Computerhilfe und vielen raffinierten Ideen der „mittlere Bereich" behandelt werden konnte.
Der entscheidende Beitrag zu einer Lösung des Waring–Problems mit „wenigen" Summanden kam durch G. HARDY und J. E. LITTLEWOOD, die in mehreren Arbeiten 1920 – 1928 zur `partitio numerorum` eine neue, äußerst fruchtbare Methode (die „Kreismethode") entwickelten, die die Lösung vieler Probleme der additiven Zahlentheorie ermöglichte.[153]

[153] Die Methode wurde durch I. M. VINOGRADOV in den vierziger Jahren noch modifiziert und damit etwas leichter handhabbar. Die erste Anwendung der HARDY–LITTLEWOODschen Methode

Grundlage ist die Darstellung der Anzahl der Lösungen in der Form

$$r_s(N) = \int_0^1 \left(\sum_{n \le P} e^{2\pi i \alpha x^k} \right)^s \cdot e^{-2\pi i N\alpha} \, d\alpha.$$

Das Integral wird in der Nähe rationaler Zahlen mit kleinem Nenner (den sogenannten `major arcs`) asymptotisch ausgewertet, im Restbereich (`minor arcs`) hinreichend gut abgeschätzt. Insbesondere folgte

$$G(k) \le c \cdot 2^k.$$

Diese Schranke ist exponentiell besser als die von HILBERT, **8.7**, p. 74. Die Methode benutzte wesentlich eine Abschätzung von Exponentialsummen,

$$\sum_{n \le P} \exp\left(2\pi i \alpha x^k\right),$$

wobei α nicht zu nahe bei einer rationalen Zahl mit kleinem Nenner liegt. Das Ergebnis ist: Ist $|\alpha - \frac{a}{q}| \ge \frac{1}{q2kP^{k-1}}$ für alle $q \le P^\beta$, so ist

$$\sum_{n \le P} \exp\left(2\pi i \alpha x^k\right) \ll P^{1-2^{1-k}+\varepsilon}.$$

I. M. VINOGRADOV konnte die Abschätzung von Exponentialsummen für nicht „zu kleine k“ mit Hilfe seines Mittelwertsatzes deutlich verbessern. Sein Ergebnis ist

$$G(k) \le 2k^2(2\log k + \log\log k + 2.5) \quad \text{für } k > 10.$$

Verschiedene Zahlentheoretiker, insbesondere R. C. VAUGHAN, erreichten schließlich

$$G(k) \le 2k \log k \cdot (1 + o(1)).$$

Die HARDY–LITTLEWOODsche Methode liefert auch eine asymptotische Formel für die Anzahl der Darstellungen, nämlich

$$r_s(N) \sim \frac{\Gamma^s\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)} \cdot \mathcal{S}(N) \cdot N^{\frac{s}{k}-1},$$

wobei die „Singuläre Reihe“ gegeben wird durch

$$\mathcal{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left(\frac{1}{q} \sum_{\ell=1}^{q} e^{2\pi i a \ell^k/q} \right)^s e^{-2\pi i \frac{a}{q} N}.$$

Für kleine k blieb noch einiges zu tun, so zeigte z.B. H. DAVENPORT um 1940

$$G(4) = 16, \quad G(5) \le 23, \quad G(k) \le 36.$$

erfolgte übrigens 1917 auf das Partitionenproblem in einer gemeinsamen Arbeit von HARDY und RAMANUJAN.

Nach YU. V. LINNIK ist $G(3) \leq 7$. Für kleine k erzielten in den letzten Jahren R. C. VAUGHAN, J. BRÜDERN und T. WOOLEY noch erhebliche Verbesserungen durch raffinierte Abwandlung der HARDY–LITTLEWOODschen Methode. J. BRÜDERN hat für solche Untersuchungen der Förderpreis des Mathematischen Forschungsinstitutes Oberwolfach erhalten.

Für das Quadratmittel der Lösungsanzahlen vermuteten HARDY und LITTLEWOOD

$$\sum_{n=1}^{N} r_k^2(n) = \mathcal{O}\left(N^{1+\varepsilon}\right).$$

Aus der Richtigkeit dieser Vermutung würde

$$G(k) \leq 2k+1, \quad \text{für } k \neq 2^m$$

folgen. Die Richtigkeit der Vermutung ist bis heute unentschieden. Die stärkere Vermutung

$$r_k(n) = \mathcal{O}\left(n^{\varepsilon}\right)$$

ist zweifelhaft. Z.B. zeigten ERDÖS, CHOWLA und PILLAI

$$r_k(n) = \Omega\left(e^{c\frac{\log n}{\log\log n}}\right).$$

MAHLER zeigte 1936, daß die Anzahl der Lösungen von

$$x^3 + y^3 + z^3 = n^{12}$$

$\gg n$ ist.

Weitere Entwicklungslinien beim Waring–Problem betrafen:[154]

- ▷ die Ersetzung von x_i^k durch Werte eines Polynoms $f(x_i),\ f \in \mathbb{Z}[x]$.
- ▷ die Ersetzung der x_i durch Primzahlen oder quadratfreie Zahlen.
- ▷ Darstellungen in der Form
  $$n = \sum_{i=2}^{g} x_i^{i+1},$$
  (THANIGASALAM, K. F. ROTH).
- ▷ Lösbarkeit von Systemen von Gleichungen,
  $$x_1^{\kappa} + \ldots + x_s^{\kappa} = N_{\kappa},\ 1 \leq \kappa \leq k.$$

[154] Man vgl. hierzu auch den Übersichtsartikel [57] des Verfassers.

▷ Diophantische Ungleichungen: Ist

$$\left| \sum_{1 \leq i \leq s} \lambda_i x_i^k \right| < \varepsilon$$

lösbar in ganzen oder primen x_i ? Kann das ε durch eine mit $\max |x_i|$ (wie stark?) fallende Funktion ersetzt werden?

Es sollte noch bemerkt werden, daß Yu. V. Linnik[155] einen elementaren Beweis für das Waring–Problem lieferte, der auf ganz anderen Ideen als der Hilbertsche beruht.

8.5 Zum Goldbach–Problem

Goldbach fragte 1742: Ist jedes gerade $N > 4$ in der Form $N = p_1 + p_2$ (mit Primzahlen $p_1,\ p_2$ darstellbar? Ist jede ungerade Zahl > 7 Summe von drei Primzahlen?
Das 18. und 19. Jahrhundert konnten zu diesem Problem nichts Wesentliches beitragen (außer numerischen Rechnungen). Hardy & Littlewood zeigen 1923, daß das ternäre Goldbachproblem lösbar ist und gaben eine asymptotische Formel für die Anzahl der Lösungen, **wenn** die Große Riemann'sche Vermutung für alle L–Funktionen richtig ist. Genauer genügt es, daß alle diese L–Funktionen keine Nullstelle in $\Re(s) > \frac{3}{4}$ besitzen.
Der Beweis erfolgte wiederum mit der Hardy–Littlewwodschen Methode; die `major arcs` müssen so weit ausgedehnt werden, daß fast keine `minor arcs` mehr übrigbleiben; die Approximation auf den `major arcs` ist möglich, wenn eine hinreichend gute Version des Primzahlsatzes für die Progression zur Verfügung steht, und dies folgte eben aus der Großen Riemann'schen Vermutung.
Das ternäre Goldbach–Problem — ohne Voraussetzung unbewiesener Hypothesen — blieb aber offen, trotz weiterer Fortschritte in der additiven Zahlentheorie; z.B. konnte T. Estermann um 1935 zeigen, daß die Gleichung

$$N = p_1 + p_2 + p_3 \cdot p_4$$

(wie immer, für hinreichend große N) lösbar ist.
Der erste entscheidende Fortschritt zum Goldbach–Problem, der die unbewiesene Hypothese der Großen Riemann'schen Vermutung vermeiden konnte, kam aber aus einer anderen Richtung. L. G. Schnirelman[156] führt „seinen“ Begriff der Schnirelmann–Dichte ein,

$$\sigma(A) = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \cdot \#\{\nu \leq n,\ \nu \in A\}.$$

[155]* 8. 1. 1915 Ukraine, † 30. 6. 1972, Petersburg. 1932 Studium der Physik, dann der Mathematik. 1940 Dissertation über die Arithmetik quadratischer Formen. Ab 1944 Prof. in Petersburg. Beschäftigung mit Problemen der Zahlentheorie, der Wahrscheinlichkeitstheorie. Viele wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden in der Zahlentheorie, insbesondere Entwicklung von Vorstufen des Großen Siebes und Anwendung auf zahlentheoretische Probleme, Dichtesätze für L–Reihen, zum Waring–Problem: $G(3) \leq 7$. Elementarer Beweis für den Hilbertschen Satz.

[156]* 15. 1. 1905, † 24. 9. 1938 in Moskau. Studium 1921–25 in Moskau, dort Promotion, 1929 – 1934 Prof. am Polytechnischen Institut, ab 1934 an der Universität Moskau. Wesentliche Beiträge zur Variationsrechnung und zur Zahlentheorie.

Mit relativ elementaren Methoden zeigte er insbesondere

$$\sigma\mathcal{A}+\mathcal{B} \geq \sigma(\mathcal{A})+\sigma(\mathcal{B})-\sigma(\mathcal{A})\cdot\sigma(\mathcal{B}).$$

Eine Anwendung der BRUNschen Siebmethode liefert, daß für die Menge $\mathcal{P}$ der Primzahlen

$$\sigma(\mathcal{P}+\mathcal{P}) \geq \delta > 0$$

gilt. Hieraus folgt mit obigem Satz:
Es gibt eine Konstante K, derart, daß jede [hinreichend große] natürliche Zahl eine Summe von höchstens K Primzahlen ist.
Der SCHNIRELMANNsche Wert für K lag nahe bei 800 000. Eine wichtige Verbesserung erzielten HEILBRONN, LANDAU und SCHERK 1937: $K \leq 71$.
In der Folgezeit ermöglichten zwei neuere Entwicklungen eine weitere Verkleinerung der Konstanten K: zum einen stand ab etwa 1948 die weit einfacher zu handhabende SELBERGsche Siebmethode zur Verfügung, zum anderen wurde 1942 der Satz von H. B. MANN bewiesen:
Ist $\sigma(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \leq 1$, so gilt

$$\sigma(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{A})+\sigma(\mathcal{B}).$$

So konnte schließlich $K \leq 17$ gezeigt werden, ein Wert, der leider von dem vermuteten $K = 3$ noch sehr weit entfernt ist. Dafür ist aber der SCHNIRELMANNsche Zugang sehr elementar und einfach.
Die entscheidende Idee zum Beweis des ternären GOLDBACH–Problems kam mit I. M. VINOGRADOV; ihm gelang es, eine Methode zur Abschätzung von Exponentialsummen $\sum\limits_{p\leq x} e^{2\pi i\alpha p}$ zu entwickeln.

8.5.1 I. M. Vinogradov, 1891 – 1983

I. M. VINOGRADOV, * 2. 9. 1891, † 20. 3. 1983 in Moskau, Sohn eines Dorfgeistlichen und einer Lehrerin, besuchte die Universität in St. Petersburg; 1918 – 1920 Dozent und Prof. an der Universität Perm, 1920 – 1934 in Petersburg, von 1934 – 1983 Direktor des Steklov–Institutes der Akademie der Wissenschaften in Moskau — autokratisch und den Zielen der herrschenden Partei nicht abgeneigt.
VINOGRADOV war ein hervorragender Vertreter der analytischen Zahlentheorie und Begründer einer einflußreichen Schule. Er beschäftigte sich z.B. mit
— Quadratischen Resten und Nichtresten [1927 Charaktersummenabschätzung],
— Gitterpunktproblemen (und Exponentialsummen),
— und dem Goldbachproblem 1937.
VINOGRADOV verfeinerte und verschärfte wesentlich die Methoden der Abschätzung von Exponentialsummen, als erster gelang ihm die Abschätzung von Exponentialsummen mit Primzahlen. Ab 1935 entwickelte er eine Methode zur Abschätzung von Exponentialsummen, die auf dem *Mittelwertsatz von Vinogradov* beruht:

Ist $f(x) = \alpha_k x^k + \ldots + \alpha_1 x$ *und*

$$S_k(N) = \sum_{n=M+1}^{M+N} e^{2\pi i f(n)},$$

so läßt sich das Mehrfach–Integral

$$I_k = \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S_k(N)|^T d\alpha_1 \ldots d\alpha_k$$

für $T \geq \frac{1}{4}k(k+1) + \ell k$ *verhältnismäßig gut abschätzen.*[157]

Dieser Mittelwertsatz ermöglicht entscheidende Verbesserungen der beim WARING–Problem nötigen Anzahl von Summanden. Man sehe z.B. auch VINOGRADOVs Monographie [67].

8.6 Hermann Weyl, 1885 – 1955

HERMANN WEYL, * 9. 11. 1885 Elmshorn (Schleswig–Holstein), † 8. 12. 1955 in Zürich. Gymnasium in Hamburg–Altona, dann Studium in Göttingen 1903–1908. Er hörte u.a. bei HILBERT, KLEIN, CARATHÉODORY (in München), MINKOWSKI, KOEBE und ZERMELO.
Die Promotion erfolgte 1908 bei HILBERT mit einer Arbeit über singuläre Integralgleichungen. 1910 Habilitation und Privatdozent in Göttingen, ab 1913 Prof. Universität Zürich, nach HILBERTs Emeritierung 1930 dessen Nachfolger in Göttingen. Emigration 1933 in die USA, Stellung am `Institute for Advanced Study` in Princeton. Er versuchte, während der Zeit des „Dritten Reiches" tatkräftig mathematischen Flüchtlingen aus Deutschland zu helfen. Emeritierung 1951, Rückkehr nach Zürich.
WEYLs mathematisches Werk ist durch außerordentliche Vielseitigkeit gekennzeichnet.

- ▷ Sturm–Liouville–Differentialgleichung

  $$-y'' + Q(x)y = \lambda y.$$

  Die Entwicklung nach Eigenfunktionen muß hier durch ein Integral ersetzt werden.

- ▷ Ab 1911 Studium der asymptotischen Verteilung der Eigenwerte eines selbstadjungierten vollstetigen Operators im Hilbertraum, Anwendung auf die Hohlraumstrahlung.

- ▷ 1913: Die Monographie *Die Idee der Riemann'schen Fläche* gibt die exakte arithmetisch–topologische Grundlegung der Funktionentheorie, Grundlegung der Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

[157] Man vgl. z.B. HUAs Ergebnisbericht [26], **9**. HUA hat 1949 VINOGRADOVs Mittelwertsatz noch verschärft.

▷ 1916 erscheint die Arbeit *Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins* in der Math. Zeitschrift, die die Begründung der Theorie der Gleichverteilung gibt, mit ersten Abschätzungen von Exponentialsummen. Kriterien für Gleichverteilung.[158]

▷ Zusammenarbeit mit Einstein 1913 in Zürich. Wichtige Beiträge zur Differentialgeometrie. Die Monographie *Raum, Zeit und Materie*, 1918, trägt viel zur Popularisierung der Relativitätstheorie bei.

▷ Lineare Darstellungen von Lie–Gruppen. Weyl erhält alle irreduziblen Darstellungen von halbeinfachen Gruppen. Aus dieser Zeit stammt *Gruppentheorie und Quantenmechanik*.

▷ Bezüglich der Grundlegung der Mathematik vertrat Weyl intuitionistische Positionen (L. E. J. Brouwer).

▷ Beiträge zur Geometrie der Zahlen, zur Zetafunktion, zur Theorie der fastperiodischen Funktionen.

8.7 David Hilbert, 1862 – 1943

Dieser Abschnitt beruht im wesentlichen auf [32], p. 202–205.
David Hilbert, * 23. 1. 1862 in Königsberg, † 14. 2. 1943 in Göttingen. Studium 1880 – 1885 in Königsberg, Promotion über *Invariante Eigenschaften specieller binärer Formen*, Habilitation 1886 im Gebiet der Invariantentheorie, Privatdozent, ao. Prof., Ordinarius 1893 in Königsberg. 1895 Göttingen.
„Als der vielleicht bedeutendste und universellste Mathematiker des ausgehenden 19. und beginnenden 20. Jahrhunderts hat Hilbert auf zahlreichen Gebieten der Mathematik und der mathematischen Physik grundlegende neue Resultate vorgelegt und wesentliche neue Entwicklungen angebahnt. Neben der Ausgestaltung der Theorie war ihm stets auch deren Begründung besonderes Anliegen.“[159]
Hilbert war Hauptvertreter der axiomatischen Richtung (man vgl. seine *Grundlagen der Geometrie*, 1899), und der Beweistheorie (Hilbert–Ackermann, *Mathematische Logik*).
Beim Hauptvortrag 1900 beim [Ersten] Internationalen Mathematiker Kongreß in Paris präsentierte Hilbert 23 Mathematische Probleme, die die Entwicklung der Mathematik für mindestens ein Jahrhundert nachhaltig beeinflußten.[160]
Hilbert bewies den [Hilbertschen] Basissatz für Ideale, und die Endlichkeit der Invariantentheorie. Er beschäftigte sich mit der Analysis, er gab Existenzaussagen und den ersten strengen Beweis des Dirichlet–Prinzips; er baute die Variationsrechnung aus, und gab eine systematische Begründung der Theorie der linearen Integralgleichungen und der Theorie der linearen Operatoren im unendlich–dimensionalen [Hilbert]–Raum. Er trug entscheidend bei zur Theorie der Eigenwerte und Eigenfunktionen von Integralgleichungen, mit Anwendung auf gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen.

[158] Zur Theorie der Gleichverteilung vgl. man z.B. die umfassende Monographie [31] von L. Kuipers & H. Niederreiter, und E. Hlawkas *Theorie der Gleichverteilung*, [25].
[159] [32], p. 203.
[160] Man sehe hierzu den nachfolgenden Abschnitt 8.7.1.

In der theoretischen Physik: Beschäftigung mit der kinetischen Gastheorie, Absorption und Emission von Strahlung, allgemeine Relativitätstheorie. 1924 und 1937, veröffentlichte er gemeinsam mit R. COURANT die Monographie *Methoden der mathematischen Physik*.
In der Zahlentheorie beschäftigte sich HILBERT insbesondere mit der algebraischen Zahlentheorie und der Klassenkörpertheorie; 1897 erschien der umfangreiche *Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper* im Jahresbericht der DMV. Die HILBERTsche Lösung des WARINGschen Problems wurde bereits erwähnt (p. 74).
Literatur: C. REID, *Hilbert*, Springer–Verlag 1970.

8.7.1 Hilbert–Probleme

HILBERTS 23 berühmte Probleme können kurz wie folgt beschrieben werden:

1. Man beweise die Kontinuumshypothese.[161]
2. Man untersuche die Widerspruchsfreiheit der Axiome der Arithmetik.
3. Man zeige, daß es unmöglich ist, nur mit Hilfe von Kongruenzaxiomen zu zeigen, daß zwei Tetraeder derselben Höhe und desselben Grundflächeninhalts dasselbe Volumen besitzen.[162]
4. Man studiere diejenigen Geometrien, in denen die Strecke zwischen zwei Punkten jeweils die kürzeste Verbindung gibt.
5. Unter welchen Bedingungen hat eine topologische Gruppe die Struktur einer Lie–Gruppe?[163]
6. Axiomatisierung der theoretischen Physik.
7. Man zeige die Transzendenz von α^β, wenn β irrational und $\alpha \neq 0, 1$ und β beide algebraisch sind. Beispiel: $2^{\sqrt{2}}$ ist transzendent.[164]
8. Primzahlprobleme (Goldbachproblem, Problem der Unendlichkeit der Primzahlzwillinge, Riemann's Vermutung).[165]
9. Man zeige ein allgemeines Reziprozitätsgesetz.[166]
10. Effektive Methoden für die Lösung diophantischer Gleichungen. [167]
11. Man untersuche quadratische Formen über beliebigen algebraischen Zahlkörpern.

[161] Lösung: K. GÖDEL, P. COHEN.
[162] Lösung: MAX DEHN 1901.
[163] Lösung durch A. M. GLEASON & D. MONTGOMERY, und L. ZIPPIN (1952) und H. YAMABE (1953).
[164] Lösung 1934 durch THEODOR SCHNEIDER und A. O. GELFOND, unabhängig voneinander.
[165] Diese Probleme sind alle noch ungelöst.
[166] Lösung durch TAKAGI 1921 und E. ARTIN 1927.
[167] Negative Lösung durch YU. V. MATIASEVIC, 1970.

12. Man konstruiere Klassenkörper algebraischer Zahlkörper.

13. Man zeige die Unmöglichkeit der Lösung algebraischer Gleichungen des 7. Grades durch Komposition von stetigen Funktionen zweier Variablen.

14. Sei k ein Körper, $f_i(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n], \quad i = 1, \ldots, m$. Sei R der Ring der rationalen Funktionen $F(X_1, \ldots, X_m)$ mit Koeffizienten aus k, derart, daß $F(f_1, \ldots, f_m) \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Ist dann R endlich erzeugt?[168]

15. Man entwickle die Grundlagen der algebraischen Geometrie.[169]

16. Man studiere algebraische Kurven und Flächen mit topologischen Methoden.

17. Sei $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine rationale Funktion mit reellen Koeffizienten, die für jedes reelle n–tupel $\vec{x}$ nichtnegative Werte annimmt. Ist dann f eine Summe von Quadraten rationaler Funktionen?[170]

18. Man drücke den euklischen n-dimensionalen Raum als disjunkte Vereinigung $\bigcup_\lambda P_\lambda$ aus, wobei jedes P_λ kongruent zu einem Polyeder aus einer gegebenen Menge ist.

19. Sind die Lösungen regulärer Probleme in der Variationsrechnung notwendig analytisch?[171]

20. Untersuche allgemeine Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen.

21. Es gibt immer eine Fuchs'sche lineare Differentialgleichung mit gegebenen singulären Punkten und gegebener Monodromiegruppe.[172]

22. Man uniformisiere analytische Funktionen mit Hilfe automorpher Funktionen.[173]

23. Man entwickle den Kalkül der Variationsrechnung weiter.

In dem Sammelband
Felix E. Browder (editor), *Mathematical Developments arising from Hilbert Problems*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, AMS 1976, 2 volumes,
wurden die Hilbertschen Probleme ausführlich dargestellt und von kompetenten Mathematikern wurde der Stand der Forschung (bis ca. 1975) genau beschrieben.

[168]Negative Lösung durch M. Nagata, 1959.
[169]Lösung: B. L. van der Waerden, 1938–1940, A. Weil 1950 u.a.
[170]Ja, E. Artin, 1927.
[171]Gelöst durch S. N. Bernstein, I. G. Petrowskii u.a.
[172]Lösung durch H. Röhrl u.a. 1957.
[173]Für eine Variable durch P. Koebe 1907 gelöst.

8.8 Klassenkörper

Hilbert führte den Begriff *Klassenkörper* ein.
Sei k ein algebraischer Zahlkörper; K eine Galois–Erweiterung von k (d.h. eine endliche, separable und normale Erweiterung). Nach Hilbert heißt K [absoluter] Klassenkörper über k, wenn
jedes Primideal $\wp$ aus k vom Grade 1 (d.h. $N(\wp) = p$ prim) in K in ein Produkt von Primidealen (von K) vom Grade 1 genau dann zerfällt, wenn $\wp$ ein Hauptideal ist.
Die Hilbertschen Vermutungen, die in gewissen Spezialfällen durch Hilbert bzw. durch Furtwängler 1907 bewiesen wurden, sind:

1. Zu jedem algebraischen Zahlkörper k existiert genau ein Klassenkörper K über k.

2. Ein Klassenkörper K/k ist eine Abelsche Erweiterung, deren Galoisgruppe isomorph zur Ideal–Klassengruppe von k ist. Der Körpergrad $[K : k]$ ist gleich der Klassenzahl h von k.

3. K/k ist eine unverzweigte Erweiterung.

4. Sei $\wp$ ein Primideal von k, und sei f die kleinste natürliche Zahl derart daß $\wp^f$ ein Hauptideal ist. Dann zerlegt sich $\wp$ in K als
$$\wp = \mathcal{P}_1 \cdots \mathcal{P}_g,$$
wobei $f \cdot g = n, \quad N_{K/k}(\mathcal{P}_i) = \wp^f$ ist.

Der Begriff Klassenkörper wurde später durch Takagi allgemeiner gefaßt.

Die Bedeutung der Fragestellung beruht auf folgender Vermutung, die 1930 ebenfalls durch Furtwängler bewiesen wurde.[174]

Sei K Klassenkörper zu k. Dann ist die Erweiterung jeden Ideals von k auf K ein Hauptideal in K.

Das Klassenkörper–Turmproblem (Furtwängler) fragt: Sei k gegeben, bilde den Klassenkörper k_1 über k, dann den Klassenkörper k_2 über k_1 etc. Bricht das Verfahren mit einem k_n der Klassenzahl 1 ab?
Dieses Problem konnte erst 1964 negativ entschieden werden, durch E. S. Golod und I. R. Shafarewich. Z.B. ist der Klassenkörperturm für
$$k = \mathbb{Q}\left(\sqrt{-3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}\right)$$
unendlich.

[174]Philipp Furtwängler, * 21. 4. 1869 bei Hannover, † 19. 5. 1940 (Wien). Studium 1889–1894 in Göttingen. Assistent am Geodätischen Institut in Potsdam, o.Prof. Landwirtschaftliche Akademie in Bonn, dann TH Aachen, dann U Wien 1912–1938. Redaktion der Enzyklopädie der Math. Wissenschaften, Band *Geodäsie*. Beweis des Reziprozitätsgesetzes in algebraischen Zahlkörpern, Existenz des Klassenkörpers, Anwendungen seiner Sätze zur Klassenkörpertheorie. Beiträge zum Fermat–Problem.

Das Umkehrproblem der Galoistheorie fragt nach folgendem: Sei k ein algebraischer Zahlkörper und G eine endliche Gruppe. Man konstruiere einen Normalkörper K/k, dessen Galoisgruppe isomorph zu G ist.
Die Klassenkörpertheorie löst dieses Problem für abelsche Gruppen G. A. Scholz und H. Reinhardt 1937 gaben eine Lösung für p–Gruppen, Shafarevich 1954 für auflösbare Gruppen.
Zur Klassenkörpertheorie vgl. man insbesondere den historisch orientierten Artikel [44] von J. Neukirch. Aus dieser Darstellung zitieren wir (p. 594/595) den folgenden, elegant formulierten Abschnitt. *„Das Hilbertsche Reziprozitätsgesetz setzte mit seiner Allgemeingültigkeit und seiner Vollkommenheit einen glanzvollen Schlußstein hinter die langen Bemühungen um die Potenzreste. Dennoch war es nur der Beginn einer ganz und gar neuen Entwicklung, die die Zahlentheorie für die nächsten Dekaden beschäftigen sollte. Sie mündete in die* **Klassenkörpertheorie**. *Die klaren und unmittelbar überzeugenden Resultate dieser übergeordneten Theorie ergaben sich nicht mit einem Schlag. Sie fügten sich, aus vielen Luken andeutungsweise herausschauend, nur langsam aus mehreren Erscheinungen verschiedener Art zusammen, und es bedurfte langjähriger, tiefgreifender Arbeit, die wahren Gründe für diese Erscheinungen zu finden, die heute ein Fundament der algebraischen Zahlentheorie geworden sind. Mehr noch als zuvor will ich darauf verzichten, den von verwirrendem Hin und Her bestimmten Gang der Dinge zu schildern, und will lieber die Zusammenhänge vom logischen Aufbau erklären, so wie er sich heute uns zeigt.“*

9 Erich Hecke und die Rolle der L–Reihen in der Zahlentheorie

Dieser Abschnitt ist auf den gleichbetitelten Artikel von Patterson ([45]) gestützt.

9.1 Erich Hecke, 1887 – 1947

Erich Hecke, * 20. 9. 1887 nahe Posen, † 13. 2. 1947, Kopenhagen. Studium in Breslau und Berlin, Promotion 1910 bei Hilbert, *„Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie“*, Habilitation 1912 bei Hilbert, *„Über die Konstruktion relativ Abelscher Zahlkörper durch Modulfunktionen von zwei Variablen“*. 1915 Prof. in Basel, 1918 Göttingen, 1919 Hamburg.
Hauptarbeitsgebiet war die algebraische Zahlentheorie, in der Hecke analytische Hilfsmittel heranzog. Er führte Zetafunktionen mit „Größencharakteren“ in die algebraische Zahlentheorie ein, studiert die Theorie der elliptischen Modulfunktionen und ihre Beziehungen zur Klassenkörpertheorie. Er bewies die Funktionalgleichung für die Dedekindsche Zetafunktion (und für deren Verallgemeinerungen).[175] Hieraus erhielt Hecke Aussagen über Teiler der Diskriminante, Zerlegungsgesetze, die Verteilung der Körpe-

[175] Dies machte insbesondere möglich, den klassischen Beweis des Primzahlsatzes auf das Problem der Verteilung der Primideale in algebraischen Zahlkörpern zu übertragen. Den Primidealsatz hatte allerdings schon Landau 1903 durch eine neue Beweismethode beweisen können (man vgl. **7.4.1**, 55.

rideale, die Berechnung der Klassenzahl relativ abelscher Zahlkörper, Gauß'sche Summen, quadratische Formen.[176]
HECKEs schönes Buch *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, Leipzig 1923, 1954, ist auch heute noch lesenswert.

9.2 L–Reihen

R. DEDEKIND (1831–1916) führte die Zetafunktion von algebraischen Zahlkörpern ein,

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(a)^s},$$

wobei $\mathfrak{a}$ die ganzen Ideale des Körpers K durchläuft. HECKE bewies 1917 die Funktionalgleichung, bestimmte die Lage der Polstellen und die analytische Fortsetzung der DEDEKINDschen Zetafunktion. Er bewies auch die Produktformel

$$\zeta_k(s) = \zeta(s) \cdot \prod L(s,\chi)$$

für abelsche Erweiterungen von $\mathbb{Q}$, indem er beide Seiten in Eulerprodukte entwickelte, die Übereinstimmung für alle bis auf endlich viele Faktoren zeigte und schließlich aus analytischen Eigenschaften beider Seiten folgerte, daß bei allen Faktoren Übereinstimmung besteht. [χ durchläuft eine dem Körper k zugeordnete Menge von DIRICHLET–Charakteren.]
HECKE führte Größencharaktere ein, das sind Homomorphismen von $I(\mathfrak{k}) \to \mathbb{C}^\times$, die auf Hauptidealen von einer gewissen, vorgegebenen Gestalt sind. [Hierbei bezeichnet $I(\mathfrak{k})$ die Halbgruppe der [ganzen], zu $\mathfrak{k}$ teilerfremden Ideale.
L–Reihen mit Größencharakteren können nun analog zu den Dirichlet'schen L–Reihen eingeführt werden.
Weiter entwickelte HECKE für diskrete Untergruppen Γ, d.h. solche von endlichem Index in $SL_2(\mathbb{Z})$, die zugehörigen Räume von Modulformen. 1936 entdeckte er, daß die Korrespondenzen T_n eine kommutative Algebra erzeugen; diese sei T_*. Er bewies: Ist $\lambda : T_* \to \mathbb{C}$ ein Homomorphismus, so ist der Raum

$$A(\lambda) = \{f \text{ Spitzenform } : T_n f = \lambda(n) f \text{ für alle } n\}$$

höchstens eindimensional. Man setze

$$L(s,\lambda) = \prod_p (1 - \lambda(p)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}.$$

Dann ist $A(\lambda)$ genau dann nichttrivial, wenn
A) das Produkt für $L(s,\lambda)$ in einer Halbebene konvergiert und eine analytische Fortsetzung auf die ganze komplexe Ebene hat,
B) die Funktion $\Lambda(s,\lambda) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,\lambda)$ der Funktionalgleichung

$$\Lambda(s,\lambda) = \Lambda(k-s,\lambda)$$

[176] Nach [32], p. 195.

genügt.
Beispiel: die Modulform $\Delta(z)$ vom Gewicht 12 wurde 1916 von RAMANUJAN betrachtet:

$$\Delta(z) = e^{2\pi iz} \prod_{n\geq 1} (1 - e^{2\pi inz})^{24} = \sum_{n\geq 1} \tau(n) e^{2\pi inz}.$$

RAMANUJAN vermutete, daß

$$\sum \tau(n) n^{-s} = \prod \left(1 - \tau(p) p^{-s} + p^{11-2s}\right)^{-1}$$

gilt, was MORDELL 1917 bewies. Die analytische Fortsetzbarkeit der Funktion wurde erst 1929 bewiesen.
RAMANUJANs Vermutung besagt: die Nullstellen des Polynoms

$$1 - \tau(p) X + p^{11} X^2$$

sind nicht–reell, d.h.

$$|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}.$$

Dies konnte erst 1974 durch PIERRE DELIGNE hergeleitet werden durch völlig neuartige Abschätzungen von Exponentialsummen mehrerer Variablen.

10 Siebmethoden

Die älteste Siebmethode ist die von ERATOSTHENES, die z.B. für die Herstellung einer nicht allzu großen Primzahltafel mit Hilfe eines PCs gut brauchbar ist. Diese Siebmethode eignet sich nicht, um die Größenordnung der Primzahlfunktion $\pi(x)$ herzuleiten.

10.1 Die Brun'sche Methode

Die erste wirklich brauchbare Siebmethode geht auf VIGGO BRUN zurück; die Methode wurde ab 1915 entwickelt und 1920 veröffentlicht. Die Methode erfordert die Überwindung kombinatorischer Schwierigkeiten, allerdings sind sowohl obere wie auch untere Abschätzungen mit nahezu demselben Aufwand zu gewinnen.

10.1.1 Lebensdaten von Viggo Brun

$*$ 13. 10. 1885 in Lier (Norwegen), † 15.8.1978 Drøbak bei Oslo. Studium in Oslo, 1910 Aufenthalt in Göttingen, 1919/1920 in Paris. 1923 Prof. a.d. Univ. Trondheim, 1946–1956 Prof. Univ. Oslo. Die von ihm entwickelte Siebmethode führte zu erheblichen Fortschritten in der additiven Primzahltheorie. Insbesondere ist die Reihe

$$\sum_{p;\, p \text{ und } p+2 \text{ prim}} \frac{1}{p}$$

konvergent, d. h. es gibt nicht „allzuviele“ Primzahlzwillinge.[177] Die Unendlichkeit der Menge der Primzahlzwillinge ist aber weder der BRUNschen noch anderen Siebmethoden zugänglich.

[177] Aus [32]. — [Literatur: Mitt. Math. Ges. Hamburg 11, 1985 3, 271–290. Historia Math. 7 (1980), 1–6.]

10.1.2 Das Siebproblem

Hierzu vgl. man insbesondere HALBERSTAM & ROTH, [22], und HALBERSTAM & RICHERT, [21]. Die BRUNsche Methode ist auch in [59] behandelt.
Gegeben ist eine Folge $\mathcal{A} = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_N\}$ natürlicher Zahlen und eine Folge $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_r\}$, $p_1 < \ldots < p_r$, von Primzahlen. Es soll die Anzahlfunktion

$$S = \#\{n \le N;\ \mathrm{ggT}(a_n, \Pi\mathcal{P}) = 1\}$$

abgeschätzt werden, mit der Abkürzung

$$\Pi\mathcal{P} = \prod_{p\in\mathcal{P}} p = p_1 \cdots p_r$$

ist. Z.B. ist offenbar, mit einem beliebigen Paramter y, $1 < y < x$, die Anzahl $\pi_2(x)$ der Primzahlzwillinge bis x [nach oben (!)] abschätzbar durch

$$\pi_2(x) \le \#\left\{n \le x, n \text{ ungerade, } \left(n(n+2), \prod_{2<p\le y} p\right) = 1\right\} + \pi(y).$$

Die Eigenschaften der Möbius–Funktion[178] geben

$$S = \sum_{n\le N} \sum_{d|(a_n,\Pi\mathcal{P})} \mu(d) = \sum_{d|\Pi\mathcal{P}} \mu(d) \cdot \sum_{\substack{n\le N\\ a_n\equiv 0 \bmod d}} 1.$$

Man könnte versuchen, mit einer Voraussetzung über die Anzahl der a_n in Restklassen, etwa

$$\sum_{\substack{n\le N\\ a_n\equiv 0 \bmod d}} 1 = \frac{w(d)}{d} \cdot N + \mathcal{O}\left(R(N)\right)$$

weiterzukommen. Aber dieses Vorgehen bringt nichts, weil die Anzahl der Teiler von $\Pi\mathcal{P}$ viel zu groß ist. BRUNs Idee war, die „Siebfunktion“

$$s_0(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

durch

$$s_m(n) = \sum_{\substack{d|n\\ \omega(d)<m}} \mu(d) \ge 0$$

für *quadratfreies* $n \ne 1$, falls m **ungerade** ist, bzw. durch

$$s_m(n) = \sum_{\substack{d|n\\ \omega(d)<m}} \mu(d) \le 0$$

für *quadratfreies* $n \ne 1$, falls m **gerade** ist, zu ersetzen.

[178] AUGUST FERDINAND MÖBIUS, * 17. 11. 1790, † 26. 9. 1868; ab 1816 a.o.Prof., ab 1844 o.Prof. der Astronomie und Mathematik in Leipzig. MÖBIUS ist vor allem als Geometer bekannt geworden.

Für die Anzahlfunktion

$$S(x) = \#\{n \leq x,\ n \equiv 1 \bmod 2, (n(n+2), \Pi\mathcal{P}_y) = 1\},$$

wobei $\mathcal{P}_y = \{p,\ 2 < p \leq y\}$ ist, erhält man mit einem geeigneten $c_2 > 0$ und

$$y = \exp\left\{\frac{\log x}{c_2 \log\log x}\right\}$$

die Asymptotik

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \prod_{2<p\leq y}\left(1 - \frac{2}{p}\right) \cdot (1 + o(1)).$$

Bei der Durchführung des Beweises ergeben sich Fehlerglieder der Gestalt

$$x \cdot \sum_{\substack{d \mid \Pi\mathcal{P}_y \\ \omega(d) \geq m}} \frac{\mu(d) \cdot \rho(d)}{d},$$

wobei $\rho(d)$ die Anzahl der Lösungen der Kongruenz $n(n+2) \equiv 0 \bmod d$ ist. Hieraus folgt

$$\pi_2(x) \leq c_3 \cdot \frac{x}{\log^2 x} \cdot (\log\log x)^2,$$

und hieraus die Konvergenz der Brunschen Reihe $\sum \frac{1}{p}$ über die Primzahlzwillinge. Die Methode läßt sich kombinatorisch ausgestalten und führt dann zu unteren und oberen Abschätzungen, z.B.

Die Anzahl der $n \leq x$, so daß sowohl n wie auch $n+2$ höchstens 10 Primfaktoren besitzen, ist

$$\geq c_4 \cdot \frac{x}{\log^2 x}.$$

Die Anzahl $r_2(n)$ der Lösungen der Gleichung $n = p + p'$ in Primzahlen p, p' ist

$$r_2(n) \leq c_5 \cdot \frac{n}{\log^2 n} \cdot \sum_{d \mid n} \frac{\mu^2(d)}{d}.$$

Die letze Ungleichung impliziert sofort

$$\sum_{n \leq x} r_2^2(n) \leq c_6 \frac{x^3}{\log^4 x}.$$

Die Anzahl $L(x)$ der $n \leq x$, die als Summe zweier Primzahlen darstellbar sind, ist

$$L(x) \geq c_7 \cdot x.$$

Denn

$$\left(c_8 \cdot \frac{x^2}{\log^2 x}\right) < \sum_{p,p',\, p+p' \leq x} 1 = \sum_{n \leq x} r_2(n),$$

und die Cauchy'sche Ungleichung gibt

$$\left(\sum_{n\le x} r_2(n)\right)^2 \le \sum_{\substack{n\le x\\ r_2(n)\ne 0}} 1\cdot\sum_{n\le x} r_2^2(n) \le L(x)\cdot c_6\cdot\frac{x^3}{\log^4 x}.$$

Unter Annahme der Richtigkeit der großen Riemann'schen Vermutung ist die Anzahl der Paare $(p, p+a)$, p prim, für die $(p+a)$ höchstens 11 Primfaktoren besitzt,

$$\gg c_{10}\cdot\frac{x}{\log^2 x} - c_{11}x^{1-\delta}.$$

Ebenso läßt sich die Anzahl der $n\le x$, für die die Werte eines ganzwertigen Polynoms $g(n)$ nur „wenige“ Primfaktoren besitzen, nach unten durch $\gg \frac{x}{\log x}$ abschätzen.

10.2 Selberg's Sieb

10.2.1 Atle Selberg

Man vgl. auch die etwas ausführlichere Darstellung in **7.5.4**, p. 71.
∗ 14. 6. 1917 Langesund (Norwegen), Sohn eines Osloer Mathematik–Professors, Studium in Oslo (Promotion 1943) bei V. Brun. Seit 1952 o.Prof. am Institute for Advanced Study, Princeton.[179]
A. Selberg hatte ein sehr breites Spektrum von Interessen: Zahlentheorie, diskrete Gruppen, automorphe Funktionen. Er fand eine neue Version der Siebmethode, gab einen elementaren Beweis des Primzahlsatzes; er zeigte erstmalig, über Hardy und Littlewood hinausgehend,[180] daß die Nullstellen der Zetafunktion auf $\Re s = \frac{1}{2}$ positive Dichte haben. Er befaßte sich mit Darstellungen von Gruppen; sein Name ist mit der Selbergschen Spurformel verbudnen. Selberg erhielt die Fields–Medaille und den Wolfspreis.

10.2.2 Die Siebmethode

Die obere Abschätzung mit Selbergs Siebmethode ist elegant und einfach; der Beweis wird auf die Bestimmung des Maximums einer quadratischen Form reduziert.
Die Anwendung der Methode kann als ein Standard–Hilfsmittel in der Zahlentheorie betrachtet werden.
Sei $\mathcal{A} = \{a_1,\dots,a_N\}$ eine Folge natürlicher Zahlen, und sei $\mathcal{P} = \{p_1,\dots,p_r\}$ eine Menge von Primzahlen. Man setze $\Pi\mathcal{P} = \prod_{\rho=1}^r p_\rho$. Jedem $p_\rho\in\mathcal{P}$ seien k_ρ Restklassen $\mathcal{R}_{\rho,1},\cdots,\mathcal{R}_{\rho,k_\rho}$ modulo p_ρ zugeordnet. Sei die Anzahlfunktion S gegeben durch

$$S = S(\mathcal{A},\mathcal{P},\mathcal{R}) = \#\left\{a\in\mathcal{A}; a\notin\bigcup_\rho\bigcup_\kappa\mathcal{R}_{\rho,\kappa}\right\}.$$

[179]Nach [32]. Lit. Notices AMS 33, 1986, p.311.
[180]Man vgl. p. 41.

Das Hauptergebnis ist das folgende:
Sei $\mathcal{D}$ eine teilergeschlossene Untermenge[181] *der Teiler von* $\Pi\mathcal{P}$, *und*

$$\mathcal{D}^* = \Big\{d \mid \Pi\mathcal{P}; d = kgV[d_1,\, d_2] \text{ für passende } d_1,\, d_2 \in \mathcal{D}\Big\}.$$

Für alle $d \in \mathcal{D}^*$ *erfülle* $\mathcal{A}$ *die Bedingung*

$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ \sigma(a)\equiv 0 \bmod d}} 1 = \gamma(d)\cdot N + R(d),$$

wobei γ *multiplikativ ist,* $\gamma(1) = 1$ *ist, und* $0 < \gamma(d) < 1$ *für* $d \neq 1$ *gilt. Weiter sei*

$$\sigma(a) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } a \notin \bigcup\limits_\rho \bigcup\limits_\kappa \mathcal{R}_{\rho,\kappa} \\ p_{\rho_1}\cdots p_{\rho_t}, & \text{wenn } a \text{ in genau } t \text{ Restklassen mod } p_{\rho_1},\cdots,p_{\rho_t} \text{ liegt.} \end{cases}$$

Sei $C(\mathcal{D})$ *die Klasse der Funktionen, die sich mit geeigneten reellen* $\lambda(d)$ *folgendermassen darstellen lassen:*

$$C(\mathcal{D}) = \left\{ s : \mathcal{A} \to \mathbb{N};\; s(a) = \sum_{\substack{d\mid\sigma(a)\\ d\in\mathcal{D}}} \lambda(d) \right\}.$$

Sei $C_1^{(2)}(\mathcal{D}) = \{s^2;\, s\in C(\mathcal{D}),\; s(a) = 1,\; \text{wenn } \sigma(a) = 1\}$ *die Klasse der Funktionen, die sich als Quadrate von* $C(\mathcal{D})$*–Funktionen mit der Nebenbedingung* $s(a) = 1,$ *wenn* $\sigma(a) = 1$ *ist, darstellen lassen. Man setze weiter*

$$L(\mathcal{D}) = \inf_{s\in C_1^{(2)}(\mathcal{D})} \sum_{s\in\mathcal{D}^*} \lambda(d)\cdot\gamma(d).$$

Mit der Bezeichnung

$$g(n) = \left(\mu * \frac{1}{\gamma}\right)(n) = \sum_{d\mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\cdot\frac{1}{\gamma(n)} = \prod_{p\mid n}\left(\frac{1}{\gamma(d)} - 1\right)$$

gilt dann:

$$L(\mathcal{D}) = \frac{1}{Q}, \qquad \text{wobei} \qquad Q = \sum_{d\in\mathcal{D}} \frac{1}{g(d)} \text{ ist.}$$

Das Infimum wird angenommen für die Funktion $s(a) = \sum\limits_{d\in\mathcal{D}^*, d\mid\sigma(a)} \lambda(d)$, *wobei*

$$\lambda(d) = \sum_{\substack{d_1,d_2\in\mathcal{D}\\ [d_1,d_2]=d}} \Lambda(d_1)\cdot\Lambda(d_2),$$

[181] $\mathcal{D}$ heißt teilergeschlossen, wenn aus $n\in\mathcal{D}$ und $d \mid n$ folgt, daß $d\in\mathcal{D}$ ist.

mit

$$\Lambda(d) = \frac{1}{Q} \cdot \frac{\mu(d)}{\gamma(d)} \cdot \sum_{r \in \mathcal{D}, r \equiv 0 \bmod d} \frac{1}{g(r)}.$$

Folgerungen.
Unter obigen Voraussetzungen gilt

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R}) \leq \frac{N}{Q(\mathcal{D})} + \sum_{d_1, d_2 \in \mathcal{D}} \Big| \Lambda(d_1) \cdot \Lambda(d_2) \cdot R([d_1, d_2]) \Big|.$$

Gilt zusätzlich noch $0 < \gamma(p) \leq 1 - \delta$, *wobei* $\delta > 0$, *so ist*

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R}) \leq \frac{N}{Q(\mathcal{D})} + \sum_{d \in \mathcal{D}^*} \left(3\delta^{-2}\right) \cdot |R(d)|.$$

Ist schließlich speziell $\mathcal{D} \subset \{d;\ d \mid \Pi\mathcal{P},\ d \leq \sqrt{z}\}$, *und gilt noch*

$$|R(d)| \leq c_1 \cdot d \cdot \gamma(d), \qquad d \cdot \gamma(d) \geq \frac{1}{c_2} > 0,$$

so wird

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R}) &\leq \frac{N}{Q(\mathcal{D})} + c_1 c_2 \cdot z \cdot Q^2 \\ &\leq \frac{N}{Q(\mathcal{D})} + c_1 c_2 \cdot z \cdot \prod_{\substack{p \leq \sqrt{z} \\ p \in \mathcal{D}}} (1 - \gamma(p))^{-2}. \end{aligned}$$

Die unteren Abschätzungen erfordern Geschick und sind nicht so einfach. Man vgl. hierzu das wunderschöne Buch [21] von Halberstam & Richert, *Sieve Methods.* Die unteren Abschätzungen wurden durch Ankeny – Onishi, Richert, Halberstam, Jurkat, Buchstab, Rosser, Iwaniec, … in eine hinreichend gut anwendbare Form gebracht.

10.3 Das Große Sieb

10.3.1 K. F. Roth

Klaus Friedrich Roth wurde am 29. 10. 1925 in Breslau geboren. Er studierte in Cambridge und London, Promotion 1950 in London; seit 1961 ist Roth dort Professor. Roth befaßte sich mit schwierigsten Fragen der Zahlentheorie.

- ▷ Eine Menge natürlicher Zahlen, die keine drei Elemente in arithmetischer Progression enthält, hat die Dichte Null. Das allgemeinere Problem, die Länge „drei“ durch eine beliebige Länge (≥ 3) zu ersetzen, wurde durch E. Szemerédi mit kombinatorischen Methoden,[182] und später durch H. Fürstenberg durch ergodentheoretische Methoden gelöst.

[182]Für die Lösung dieses Problems hatte P. Erdös 10.000 $ ausgesetzt, da er dieses Problem für höchst schwierig hielt.

- ▷ Für den Beweis des THUE–SIEGEL–ROTHschen Satzes *Ist α algebraisch vom Grade > 2, so hat für jedes $\mu > 2$ die Ungleichung*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^\mu}$$

höchstens endlich viele Lösungen in (teilerfremden) rationalen Zahlen $\frac{a}{q}$.

erhielt K. F. ROTH die Fields–Medaille.[183]

- ▷ Von ROTH stammen gewichtige Beiträge zur Theorie des „Großen Siebes".

10.3.2 Methode

Die Methode des großen Siebes, das auf YU. V. LINNIK[184] und ALFRED RÉNYI[185] zurückgeht, kann wie folgt beschrieben werden.
Gegeben ist (wie im vorigen Abschnitt **10.2.2** eine Folge

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$$

ganzer Zahlen. Jeder Primzahl p seien $k(p)$ inkongruente Restklassen

$$\mathcal{R}_{p,1}, \ldots, \mathcal{R}_{p,k} \bmod p$$

zugeordnet. $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ bezeichne die Anzahl der Elemente $a_n \in \mathcal{A}$, die in keiner der vorgegebenen Restklassen $\mathcal{R}_{p,\kappa}$ liegen. Dann ist, für jedes $Q \geq 1$,

$$S \leq \frac{1}{L} \cdot (A + 2Q^2),$$

wenn die Folge $\mathcal{A}$ im Intervall $[M, M + A]$ enthalten ist. Hierbei ist

$$L = \sum_{q \leq Q} \mu^2(q) \cdot \prod_{p|q} \frac{k(p)}{p - k(p)}.$$

Der Beweis dieses Satzes läßt sich auf eine Abschätzung von Exponentialsummen im Mittel zurückführen.

Es bezeichne $\|\beta\|$ den Abstand von β zur nächsten ganzen Zahl. $\mathcal{X}$ sei eine Menge reeller Zahlen, wobei für alle $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $x_1 \neq x_2$, die Ungleichung

$$\|x_1 - x_2\| \geq \delta \qquad \textit{mit einem } \delta > 0$$

gilt. Sei, mit komplexen α_m,

$$S(x) = \sum_{M < m \leq M+A} \alpha_m \cdot \exp(2\pi i x).$$

---

[183] Man vgl. hierzu **7.5.1**, p. 68.

[184] YURI VLADIMIROWIC LINNIK, * 8. 1. 1915, † 30. 6. 1972 (St. Petersburg). Er befaßte sich mit schwierigen Problemen aus der Zahlentheorie und der Wahrscheinlichkeitstheorie.

[185] ALFRED RÉNYI, * 20. 3. 1921, † 1. 2. 1970, Budapest. Wichtige Beiträge zur Zahlentheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie, Informationstheorie, Graphentheorie, Kombinatorik.

Dann gilt

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} |S(x)|^2 \le \left(A + \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\delta} + 3\right)\cdot \sum_{M<m\le M+A} |\alpha_m|^2.$$

Das „Große Sieb" wird z. B. beschrieben in HALBERSTAM – ROTH, [22], IV §10, H. L. MONTGOMERY [40], und H. E. RICHERT, [51], und MOTOHASHI, [41]. Für Summen über Charaktere χ mod q

$$S(\chi) = \sum_{\substack{M<n\le M+N\\(n,q)=1}} a_n\chi(n),$$

wobei die a_n komplexe Zahlen sind, die $a_n = 0$ erfüllen außer wenn $(n,q) = 1$ ist für alle $q \le Q$, gilt z.B.

$$\sum_{q\le Q}\frac{1}{\varphi(q)}\cdot\sum_{\chi \bmod q}|\tau(\chi)|^2\cdot|S(\chi)|^2 \le (N+Q^2)\cdot\sum_{M<n\le M+N}|a_n|^2,$$

wobei

$$\tau(\chi) = \sum_{\ell=1}^{q}\chi(\ell)\cdot\exp\left(2\pi i\frac{\ell}{q}\right).$$

10.3.3 Einige Anwendungen des Großen Siebes

Das große Sieb läßt sich leicht anwenden, um z.B. den Satz von BRUN – TITCHMARSH in scharfer Form zu zeigen:

$$\pi(N,\ q,\ell) \le \frac{2}{\varphi(q)}\cdot\frac{N}{\log(\frac{N}{q})}\cdot\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{\log\log N/q}{\log N/q}\right)\right).$$

Dies gilt für $q \le e^{-2}\cdot N$.
Für $a \ge 4$ bewies R. C. VAUGHAN 1970 mit Hilfe des großen Siebes, daß die Anzahl $E_a(N)$ der $n \le N$, für die die Gleichung

$$\frac{a}{n} = \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}$$

nicht lösbar ist, durch

$$E_a(N) \le c(a)\cdot N\cdot\exp\left(-\delta(a)\cdot(\log N)^{\frac{2}{3}}\right)$$

abschätzbar ist.
Ganz wichtig ist das „Große Sieb" für den Beweis von Dichtesätzen für L–Reihen; man vgl. hierzu [40].

11 Schlußbemerkungen

Der Verfasser hofft, daß der geneigte Leser in dieser Vorlesung trotz der durch die Vorlieben des Verfassers und dadurch bedingte Auslassungen[186] ein einigermaßen zutreffendes Bild der Entwicklung der Zahlentheorie, insbesondere im 19. Jahrhundert,

[186] Aus Zeitgründen konnten weder die *Geometrie der Zahlen* noch die *Theorie der Diophantischen Approximationen* behandelt werden. Ebenso fehlt eine Behandlung der effektiven Abschätzung der Diskriminanten von Zahlkörpern mit gegebener Klassenzahl — ein Problem, das schon auf GAUSS zurückgeht.

bekommen hat. Die zitierte Literatur sollte es dem Leser ermöglichen, in die angesprochenen Themenkreise tiefer einzudringen.

Index