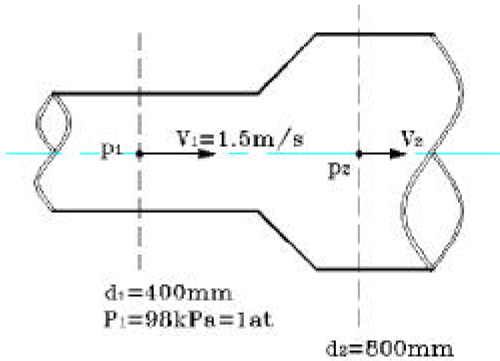
(교재의 예제 3.3) : 관의 직경이 변할 때의 압력 구하기

그림에서 하류측 압력 p_2를 구하기 위하여 먼저

유속 v_2를 알아야 한다.



① $v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = v_1 (\frac{d_1}{d_2})^2 = 0.375 [m/s]$

(연속방정식 이용)

② p_2를 구하기 위하여, 베르누이 방정식 사용한다.

(이 경우에는 수두형으로 된 것 보다는 압력형으로 된 것이 계산상 편리하다)

$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$ 에서 p_2에 관하여 정리하면,

$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) + \rho g(z_1 - z_2)$ 이 되며, 관이 수평으로 설치되어 있으므로

$z_1 = z_2$이 된다. 따라서

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2)^2 = 98000 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (1.5^2 - 0.375^2)$$
$$= 98000 + 1055(Pa) = 99055(Pa) = 1.01(at)$$

→ 2단면에서는 속도가 감소 (1.5m/s → 0.375m/s)하여 이에 대한 속도수두만큼

압력수두가 증가(1055 Pa)하여 압력이 증가 함을 알 수 있다.

(교재의 예제 3.4) : 관의 직경 및 높이가 변화할 때의 압력 구하기

① 문제에서 주어진 조건

단면 1 : $d_1 = 20cm$, 속도(v_1) 및 압력(p_1)은 미지

단면 2 : $d_2 = 15cm$, $p_2 = 0$ (∵대기압), $Q = 0.1m^3/s$, 속도(v_2)는 미지

$$z_2 = z_1 + 5 \times \sin 30° = 3 + 2.5 = 5.5(m)$$

② 구해야 할 값 : p_1, v_2

③ 먼저 연속방정식에 의해 유속 v_1, v_2를 구한다.

$A_1 v_1 = A_2 v_2 = Q$ 에서 $v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{\frac{\pi}{4} d_1^2} = \frac{0.1}{\frac{\pi}{4} 0.2^2} = 3.18 [m/s]$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 v_1 = \left(\frac{20}{15}\right)^2 \times 3.18 = 5.65\,[m/s]$$

④ **베르누이 방정식에 의해 단면1의 압력 p_1을 구한다**

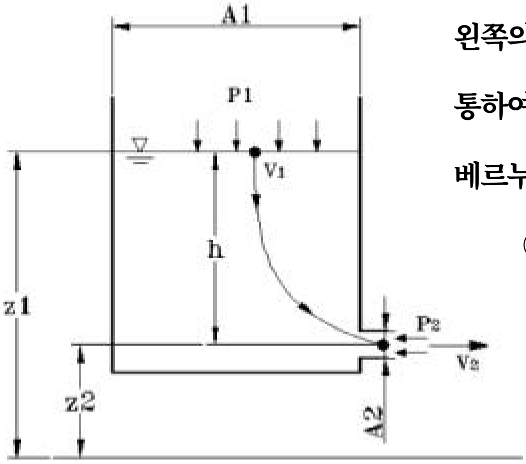
$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$ **에서 p_1에 관하여 정리하면,**

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(z_2 - z_1) \\ &= 0 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (5.65^2 - 3.18^2) + 1000 \times 9.8 \times (5.5 - 3) \\ &= 35405(Pa,g) = 0.36(at,g) \end{aligned}$$

윗 식에서 p_1의 압력을 계기압력이라고 한 것은 p_2의 압력인 대기압을 0 **으로 하여 계산하였기 때문이다**. **물론 대기압이** 1[at]**라고 한다면**, p_1**의 압력을 절대압력으로 표현하면**, 1.36[at,a]**가 될 것이다**.

3.5 베르누이 방정식의 응용

(1) 토리첼리 효과 (torricelli effect)



왼쪽의 그림은 깊이 h인 탱크의 옆면에 뚫린 구멍을 통하여 유체가 유출되고 있다. 유체의 유출속도를 베르누이 방정식을 사용하여 구하여 본다.

① 유체입자 1과 2에 베르누이 방정식을 적용한다.

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

v_2가 유출속도이므로 이에 대하여 식을 정리하면, $\frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2$ 가 된다.

② 주어진 조건을 위의 식에 적용한다.

$p_1 = p_2 = p_0$(대기압) 이고, $z_1 - z_2 = h$ 이므로, 위의 식은

$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} + h$ 로 된다.

③ 연속방정식을 이용하여 v_1을 v_2에 대한 식으로 바꾸어, 대입한다.

$A_1 v_1 = A_2 v_2$이므로, $v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1}$ 가 된다.

그런데, 탱크의 경우 $A_1 \gg A_2$ 이므로, $\frac{A_2}{A_1} \approx 0$ 가 되고, $v_1 \approx 0$ 가 된다.

즉, 위에서 구한식 $\frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} + h$ 은 $\frac{v_2^2}{2g} = h$ 로 쓸 수 있다.

④ 따라서, 탱크의 옆면 구멍을 통해 분출되는 유체의 속도는

$v_2 = \sqrt{2gh}$ 가 된다. (유체의 토리첼리 효과)

⑤ 이때 분출되는 유량은

$Q = A_2 v_2 = A_2 \sqrt{2gh}$ 가 된다.

(교재의 예제 3.5는 각자가 풀어 보기 바랍니다)

(2) 유량계(flow meter)

1) 오리피스를 이용한 유량계

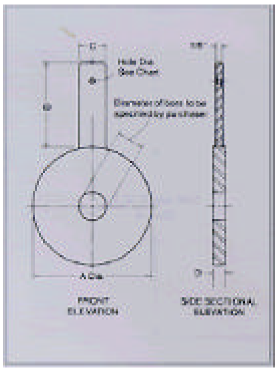
-. 오리피스(orifice) : 관 흐름을 교축(유동 단면적을 급속히 축소)시켜 주기 위한 기구

관 흐름의 유량제어 또는 차압(감압)시키는데 사용된다.

-. 오리피스의 구조

[오리피스 모양]

[오리피스 플랜지]



[오리피스 형상]

[오리피스 플랜지 형상]

-. 유량측정의 원리

① $Q = A_2 v_2$ 에 의해 유량을 구한다.

② A_2는 오리피스의 제원으로 주어지고

v_2를 구해야 한다.

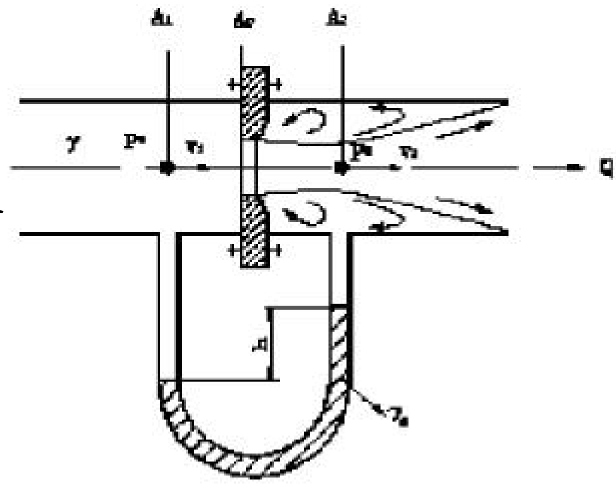
③ v_2 를 구하기 위해 베르누이 방정식을

사용한다.

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

윗 식에서,

$z_1 = z_2$ 이므로 (수평으로 놓여 있음)



[오리피스 유량계의 원리]

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}$$ **와 같이 되고,** v_2**를 구하기 위해 식을 정리하면,**

$$\frac{v_2^2}{2g}=\frac{p_1-p_2}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}$$ **가 된다.**

④ 윗 식에서 v_1 **과** $\frac{p_1-p_2}{\gamma}$**가 미지수 이므로 먼저** v_1**을 구한다.**

연속방정식 $A_1v_1=A_2v_2$**에서** $v_1=\frac{A_2}{A_1}v_2$ **이므로 이를 윗식에 대입한다.**

$$\frac{v_2^2}{2g}=\frac{p_1-p_2}{\gamma}+\frac{1}{2g}\left(\frac{A_2}{A_1}v_2\right)^2 \Rightarrow \quad \left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]\frac{v_2^2}{2g}=\frac{p_1-p_2}{\gamma}$$

⑤ $\frac{p_1-p_2}{\gamma}$**를 구하기 위해 부착된 액주계를 이용한다.**

$p_1-p_2=(\gamma_s-\gamma)h$ **이므로 (시차식 액주계 부분 참조)**

$p_1-p_2=\gamma(\frac{\gamma_s}{\gamma}-1)h$ **이 된다. 따라서** $\frac{p_1-p_2}{\gamma}=(\frac{\gamma_s}{\gamma}-1)h$ **이 된다.**

⑥ 따라서, $\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]\frac{v_2^2}{2g}=\frac{p_1-p_2}{\gamma}$, $\frac{p_1-p_2}{\gamma}=(\frac{\gamma_s}{\gamma}-1)h$ **의 두 식에서,**

$\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]\frac{v_2^2}{2g}=(\frac{\gamma_s}{\gamma}-1)h$ **가 되므로 이를** v_2**에 대해서 정리하면,**

$$\frac{v_2^2}{2g}=\frac{(\frac{\gamma_s}{\gamma}-1)h}{\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}$$ **가 되고,** $$v_2=\sqrt{\frac{2gh(\frac{\gamma_s}{\gamma}-1)}{\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}$$ **가 된다.**

즉,

$$v_2=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}\sqrt{2gh(\frac{\gamma_s}{\gamma}-1)}=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right]}}\sqrt{2gh(\frac{\gamma_s}{\gamma}-1)}$$

⑦ 따라서 유량 Q **는**

$$Q=A_2v_2=\frac{A_2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right]}}\sqrt{2gh(\frac{\gamma_s}{\gamma}-1)}$$

2) 벤츄리 튜브(Venturi tube)를 이용한 유량계

-. 오리피스와 같은 역할을 한다. 단, 오리피스보다 손실이 적도록 설계되어 있다.

-. 유량측정장치(유량계)로 사용되며,

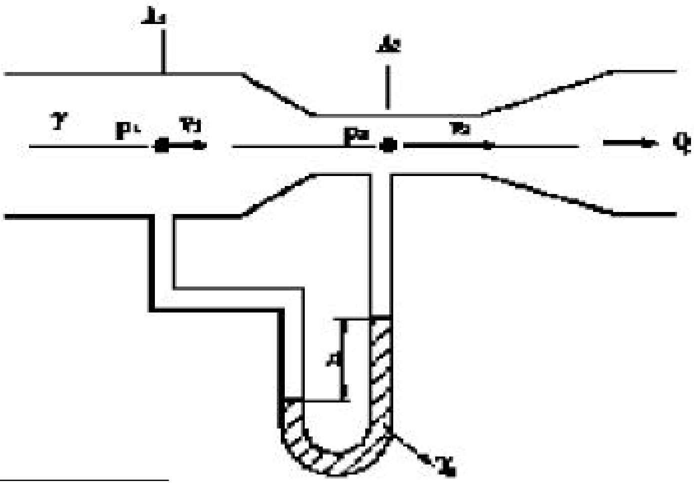
이탈리아의 Venturi에 의해 처음 고안되었다.

-. 오른쪽 그림과 같이 된 벤츄리관을 관 도중에

연결하여 관내의 유량을 측정하는 기구이다.

(벤츄리 유량계, Venturi meter)

-. 유량측정의 원리



오른쪽 그림에서 보는 바와 같이

오리피스 유량계와 같다.

다만, 실제유체에 대한 유량을

구할 때, 유량계수가 다르다.

(벤츄리미터쪽의 손실이 적다)

-. 유량식

$$Q = A_2 v_2 = \frac{A_2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right]}} \sqrt{2gh\left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1\right)}$$

※ 위의 경우는 모두 이상유체의 유량을 계산하는 식이다.

실제 유체의 경우, 손실을 감안하여 유량계수 C_d를 곱해주어야 한다.

$$Q = C_d A_2 v_2 = C_d \frac{A_2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right]}} \sqrt{2gh\left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1\right)}$$

이때, 오리피스는 $C_d = 0.6$, 벤츄리미터의 경우 $C_d = 0.95$ 정도로 하여 계산하게 된다.

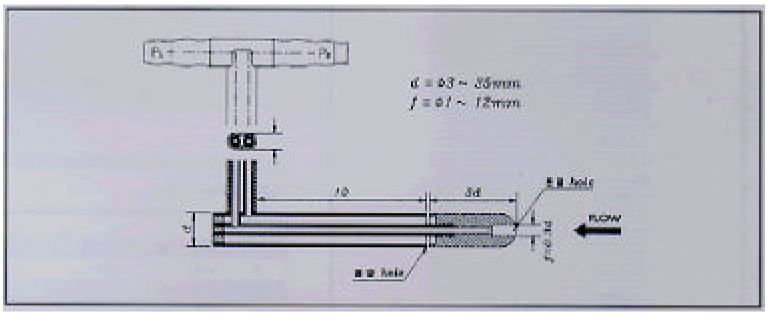
(3) 피토관을 이용한 유속계

1) 피토관(Pitot tube)

-. 프랑스인 Pitot에 의해 제시되었다.

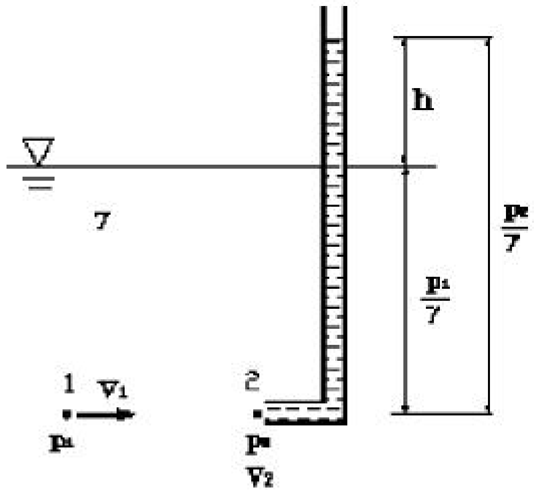
-. 그 후 측정 장비로 개발하여 항공기와 선박의 속도를 측정하는데 이용 되었다

[피토 정압관의 외형]



[피토 정압관의 내부]

2) 피토관의 측정 원리



왼쪽 그림과 같이 유리관을 90° 로 구부려서 강물속에 꽂아 두었다고 한다.

높이 h를 측정하여 유속을 계산한다(피토관)

1점의 유체가 유선을 따라 흘러 2점에 도달한다.

점1과 2에 베르누이 방정식을 적용한다.

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$ 에서, $z_1 = z_2$, $v_2 = 0$ 이므로

$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} = h$$ 이 된다.

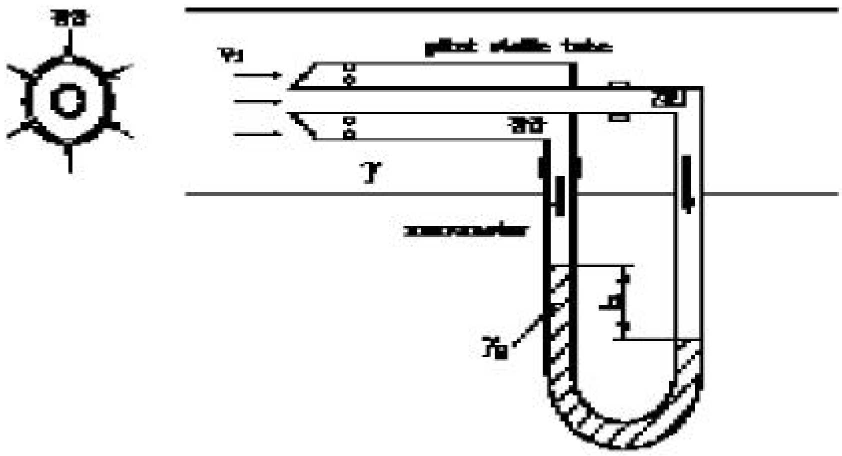
따라서 강물의 유속 $v_1 = \sqrt{2gh}$ 에 의해 계산할 수 있다.

3) 피토 정압관

-. 위와 같은 형태의 피토관으로는 용도가 극히 제한되므로 이를 개선한 것.

-. 위의 피토관은 구멍으로 전압(정압+동압)이 전달되는 형태로 되어 있는 것에 반해,

피토 정압관은 정압이 전달되는 구멍을 추가한 것이다.



위의 그림은 관 흐름속에서 유속을 측정하기 위해 피토 정압관을 설치해 둔 그림이다.

정압을 p_s , 전압을 p_t 라고 하자.

시차액주계에서 압력차 $p_t - p_s$ 를 계산할 수 있다. 즉,

$p_t - p_s = (\gamma_s - \gamma)h = \gamma(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1)h$ 이 된다.

그런데 $p_t - p_s = p_v = \frac{1}{2}\rho v^2$ 이므로, 이 두 개의 식에서 v를 계산할 수 있다. 즉,

$\frac{1}{2}\rho v^2 = \gamma(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1)h$ 가 되고, 이를 v에 대해서 정리하면,

$v = \sqrt{2gh(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1)}$ 에 의해 유속을 구할 수 있다.

(4) 펌프와 터빈

1) 펌프와 터빈

① 펌프 : 기계에너지를 유체에너지로 바꾸어 주는 유체기계

② 터빈(水車) : 유체에너지를 기계에너지로 바꾸어 주는 유체기계

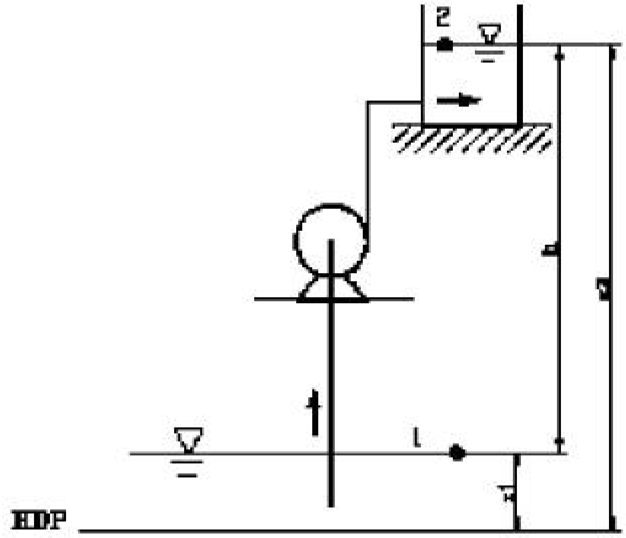
2) 베르누이 방정식을 사용하여 펌프 및 터빈의 양정(揚程, head) 구하기

<펌프>

다음 그림과 같은 펌프를 이용한 양수시스템이 있다.

흡입 유체면과 송출 유체면의 높이차이는 h[m]이다.

① 이를 위해 펌프는 단위중량당의 유체에 일을 얼마나 해 주어야 하는가?



입자1이 펌프로부터 에너지 E_p를 받은 결과

입자2의 위치에 양수되었다.

이를 에너지 방정식으로 표시하면,

$E_1 + E_p = E_2$ 가 된다. 이를 풀어 쓰면,

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + E_p = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

윗 식에서 양수시스템의 조건을 대입한다.

$p_1 = p_2 = 0$ (대기압)

$v_1 = v_2 = 0$, $z_2 - z_1 = h$ 이므로

이 조건으로 위의 에너지 방정식을 정리하면, $E_p = h$ 가 된다.

즉, 펌프가 해야 하는 일은 $h\ [m] = h\ [J/N]$ 이 된다.

② 만약 유량 Q로 양수한다면, 펌프의 동력은 얼마인가?

※ 수동력(水動力, 유체의 수두 또는 압력으로 인한 동력)에 관한 식

$$\begin{aligned}
\text{동력} &= \frac{\text{일}}{\text{시간}} = \frac{h[J/N] \times W[N]}{t[s]} = h[J/N] \times \frac{W[N]}{t[s]} = h[J/N] \times G[N/s] \\
&= h[J/N] \times \gamma Q[N/s] \\
&= \gamma Qh[W] \\
&= pQ[W]
\end{aligned}$$

따라서 이에 필요한 펌프의 동력 $L = \gamma Qh[W]$ 가 된다.

(예) 지하 5[m] 깊이에 있는 물을 펌프로 양수하여 지상 15[m]의 물탱크로 양수하고자 한다.

유량이 $1[\ell/s]$로 양수하기 위해 사용할 펌프의 동력을 구하시오.

☞ 펌프가 물에 주어야 할 단위 중량당 에너지는 $h = 20[m] = 20[J/N]$이다.

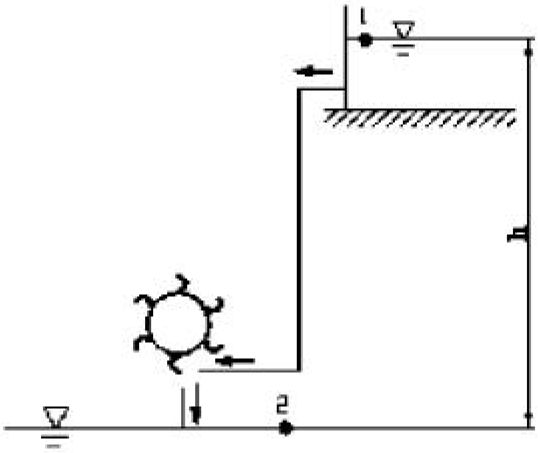
단위를 통일하기 위해 $1[\ell/s] = 1 \times 10^{-3}[m^3/s]$가 되므로,

따라서 동력은 $L = \gamma Qh = 9800 \times 1 \times 10^{-3} \times 20 = 196[W] = 0.196[kW]$

이 된다.

< 터빈>

에너지 변환 기능이 펌프와 정반대이므로 관련 방정식도 정반대의 형태로 된다.



왼쪽 그림은 유효낙차 h[m]인 곳에 수차가 설치되어 있다.

이 수차가 얻는 단위중량당의 에너지를 구하기 위하여 에너지 방정식을 써 보면,

$E_1 - E_T = E_2$ 가 된다. 즉,

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 - E_T = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

에서 위의 펌프와 같은 조건을 대입하면,

$E_T = h$ 가 된다.

물론 이 터빈이 발생하는 동력 $L = \gamma Q h$ 에 의해 구할 수 있다.