

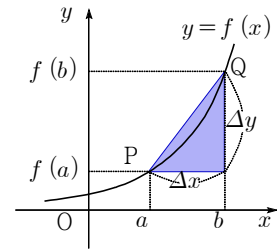
1. 미분계수

1. 평균변화율

(1) 함수 $y=f(x)$ 에서 x 의 증분 Δx 에 대한 y 의 증분 Δy 의 비율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

를 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$ 의 평균변화율이라 한다.



(2) 평균변화율의 기하학적 의미

$y=f(x)$ 의 평균변화율은 오른쪽 그림에서 직선PQ의 기울기

2. 변화율(미분계수, 순간변화율, 순간속도)

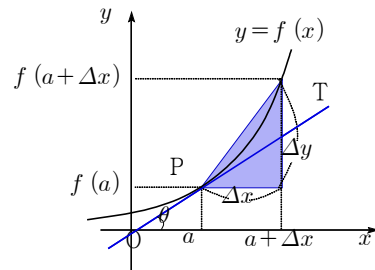
(1) 함수 $y=f(x)$ 에 대하여 x 의 값이 a 에서 $a+\Delta x$ 까지 변할 때의 평균변화율에서 Δx 가 0에 한없이 가까워질 때의 극한값

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

를 함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 변화율 또는 미분계수라 하고 기호로

$$f'(a), y'_{x=a}, \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=a}$$

와 같이 나타낸다.



(2) 변화율의 기하학적 의미

함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 는 곡선 $y=f(x)$

위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기와 같다.

변화율의 기하학적 의미

$\Delta x \rightarrow 0$ 이면 점Q는 그래프를 따라서 한없이 점P에 가까워지고, 평균변화율의 극한값 $f'(a)$ 는 점P에서의 접선의 기울기를 의미한다.

미분계수의 기울기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 θ 라 하면, $f'(a) = \tan \theta$

$x=a$ 에서의 미분계수

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h} \end{aligned}$$

또, $a+\Delta x = x$ 로 놓으면 $\Delta x = x-a$ 이고, $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때, $x \rightarrow a$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x^2)-f(a)}{x^2-a}$$

1. 함수 $f(x)=x^2-x$ 에서 x 의 값이 다음과 같이 변할 때의 평균변화율을 구하시오.

(1) 1에서 3까지 변할 때

(2) -2에서 -1까지 변할 때

2. 함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 에서 x 의 값이 a 에서 2까지 변할 때의 평균변화율이 5일 때, 상수 a 의 값을 구하시오. (단, $a < 2$)

3. 함수 $f(x) = x^2 + x + 1$ 에 대하여 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 평균변화율과 $x=1$ 에서의 미분계수가 같을 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하시오.

4. 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 중 그 값이 나머지 넷과 다른 것은?

① $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

② $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1}$

③ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{2}\right) - f\left(1 - \frac{h}{2}\right)}{h}$

④ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{2x - 2}$

⑤ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-2h)}{h}$

5. $f'(1) = 2$ 일 때, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+3\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ 의 값을 구하시오.

6. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3$ 일 때, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{h}$ 의 값을 구하시오.

7. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(1) = 6$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^3 - 1}$ 의 값을 구하시오.

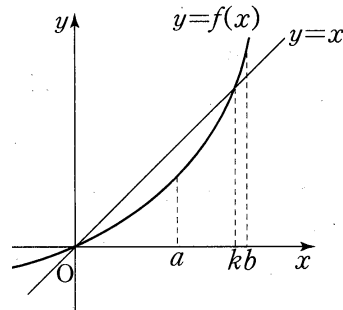
8. 다음 그림은 미분 가능한 함수 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 그래프이다. $0 < a < k < b$ 일 때,
 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

_____ < 보 기 _____

ㄱ. $b-a > f(b)-f(a)$ >

ㄴ. $f'(a) < f'(b)$

ㄷ. $f'(a) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



- ① ㄱ

② ㄴ

③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ

⑤ ㄴ, ㄷ

2. 미분가능성과 연속성

1. 미분가능성과 연속

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면, $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

그러나 그 역은 성립하지 않는다.

함수 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 미분계수 $f'(a)$ 는 a 에 의하여 결정되는 상수이다.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

(i) $x = a + \Delta x$ 라고 놓으면 $\Delta x = x - a$ 이고, $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때 $x \rightarrow a$

$$\therefore f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - f(a)\} = \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= 0 \cdot f'(a) = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

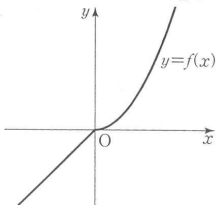
따라서, $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 그 점에서 연속이다.



9. 함수 $f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 0) \\ x^2 & (x > 0) \end{cases}$ 에 대하여 다음을 조사하시오.

(1) $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속인가?

(2) $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능한가?



10. 다음 함수가 미분가능하지 않은 x 의 값을 찾고, 그 점에서 미분가능하지 않은 이유를 말하시오.

$$(1) y = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \geq 0 \text{ 일 때}) \\ -x^2 - 1 & (x < 0 \text{ 일 때}) \end{cases} \quad (2) y = \frac{|x|}{x} \quad (3) y = |x^2 - 4|$$

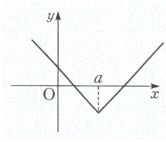
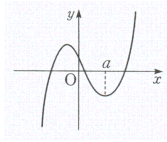
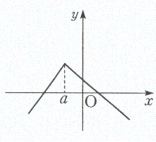
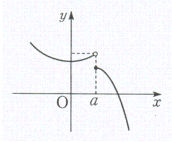
11. 다음 함수의 그래프를 보고, $x=a$ 에서 연속인 함수와 $x=a$ 에서 미분가능한 함수를 고르시오.

(1)

(2)

(3)

(4)



12. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 & (x \geq 1) \\ bx + 3 & (x < 1) \end{cases}$ 이 모든 실수 x 에 대하여 미분가능할 때,

상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하시오.

13. 함수 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 $y=f(x)$ 는

$x=a$ 에서 연속이다.'의 역이 성립하지 않음을 반례를 들어 증명 하고자 한다.

다음 중 반례로서 적당한 함수는?

① $y = x^4$

② $y = \frac{1}{2x}$

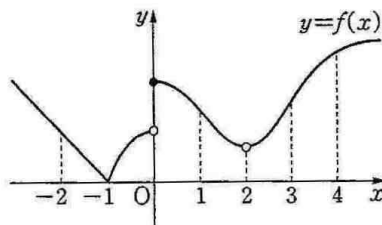
③ $y = |x|$

④ $y = \begin{cases} x^3 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

⑤ $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

14. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 구간 $(-2,4)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 불연속적인 점은 m 개,

미분가능하지 않은 점은 n 개다. 이 때, $m+n$ 의 값을 구하시오.



3. 도함수

1. 도함수의 정의

미분가능한 함수 $f(x)$ 의 정의역에 속하는 임의의 원소 x 에 대하여 $f'(x)$ 를 대응시키면 새로운 함수

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

가 정해진다. 이때, 이 함수 $f'(x)$ 를 함수 $f(x)$ 의 도함수라 하고 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}f(x)$$

또, 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 를 구하는 것을 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분한다고 하며, 그 계산법을 미분법이라 한다.

2. 도함수의 기하학적 의미

도함수 $f'(x)$ 는 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 임의의 점 $(x, f(x))$ 에서 접선의 기울기를 뜻한다.

☞ 도함수 기호 $f'(x)$ 는 『 f 프라임(prime) x 』로 읽고, $\frac{dy}{dx}$ 는 「 dy, dx 」로 읽고 나눈다는 뜻이 아니라 y 를 x 에 관하여 미분한다는 뜻이다. $\frac{d}{dx}f(x)$ 는 「 $d, dx, f(x)$ 」로 읽는다.

3. 미분법의 기본 공식

두 함수 $f(x), g(x)$ 의 도함수가 존재할 때,

- | | |
|-----------------------------|--|
| (1) $y = c$ (c 는 상수) | $y' = 0$ |
| (2) $y = x^n$ (n 은 자연수) | $y' = nx^{n-1}$ |
| (3) $y = cf(x)$ (c 는 상수) | $y' = cf'(x)$ |
| (4) $y = f(x) \pm g(x)$ | $y' = f'(x) \pm g'(x)$ (복부호동순) |
| (5) $y = f(x)g(x)$ | $y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ |
| (6) $y = f(x)g(x)h(x)$ | $y' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$ |

4. 합성함수의 미분법

$$y = \{f(x)\}^n \quad y' = n\{f(x)\}^{n-1} \cdot f'(x)$$

15. 다음 함수를 미분하시오.

$$(1) y = 4(3x^2 - 4x + 2) \quad (2) y = -4x^3 + 2x^2 - 1$$

$$(3) y = -7x^5 - 2x^3 + 5 \quad (4) y = \frac{1}{3}x^6 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1$$

16. 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y = -5x(x^2 + 1)$

(2) $y = (-x + 2)(2x^2 - x + 1)$

3) $y = (-5x + 1)^3$

(4) $y = (-3x^2 + 5x + 2)^3$

(5) $y = (x + 2)^2(3x^2 - 1)$

(6) $y = (7x + 1)(2x - 3)^2$

17. $f(x) = x^3 + ax^2 + 3$ 에 대하여 $f'(4) = -4$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

18. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 - 1}{x + 1}$ 의 값을 구하시오.

19. 다항식 $x^{10} - 2x + 1$ 을 $(x - 1)^2$ 으로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

내신대비강화!!

20. 주어진 구간에서 다음 함수의 평균변화율을 구하시오.

(1) $f(x) = x^2 + 3x$ [1, 5]

(2) $f(x) = x^3 + 2x$ [0, 2]

21. 함수 $f(x) = x^2$ 에 대하여 x 의 값이 2에서 $2+h$ 까지 변할 때의 평균변화율이 6일 때, h 의 값을 구하시오. (단, $h > 0$)

22. 함수 $f(x) = x^2 - 5x + 4$ 에 대하여 x 의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율과 $x = c$ 에서의 순간변화율이 같을 때, c 의 값을 구하시오. (단, $1 < c < 3$)

23. 함수 $f(x) = x^3 - 1$ 의 구간 $[1, a]$ 에서의 평균 변화율과 $x = 1$ 에서의 미분계수가 같을 때, 상수 a 의 값을 구하시오. (단, $a > 0$)

24. 함수 $y = f(x)$ 에서 $f'(a) = 2$ 일 때, 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a+h)}{h}$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{4h}$

25. $f'(3) = 1$ 일 때, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3+6\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$ 의 값을 구하시오.

26. 함수 $y = f(x)$ 에서 $f(1) = 1, f'(1) = 2$ 일 때, 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{af(1) - f(a)}{a - 1}$

(2) $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{a^2 f(1) - f(a)}{a - 1}$

27. $f'(1)=3$ 인 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}$ 의 값을 구하시오.

28. 함수 $f(x)$ 에서 $f(2)=3$, $f'(2)=2$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)-xf(2)}{x^2-3x+2}$ 의 값을 구하시오.

29. 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}=3$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-2}{x^2-4}=\frac{1}{4}$ 을 만족시킬 때, $f'(2)+g'(2)$ 의 값을 구하시오.

30. 함수 $f(x)=x^3$ 에 대하여 $P=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $Q=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$, $R=f'(b)$ 라 할 때, P, Q, R 의 대소 관계는? (단, $a < b < c$)
 ① $P < Q < R$ ② $P < R < Q$
 ③ $Q < P < R$ ④ $R < P < Q$
 ⑤ $R < Q < P$

31. 함수 $f(x)=|x-1|$ 에 대하여 $x=1$ 에서의 연속성과 미분가능성을 조사하시오.

32. 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x^3 & (x \geq 1) \\ 6x-4 & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $x=1$ 에서의 연속성과 미분가능성을 조사하시오.

33. 다음 보기 중 $x=1$ 에서 미분가능한 것을 모두 고른 것은?

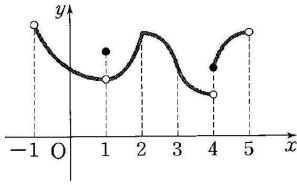
[보 기]

$\neg. y = x^2 - 1 $ $\neg. y = (x-1)^2$ $\sqsubset. \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & (x \neq 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$

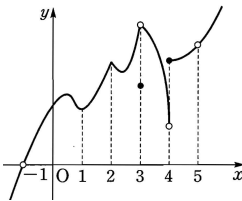
- ① $\neg$ ② $\neg$ ③ $\sqsubset$
 ④ $\neg, \neg$ ⑤ $\neg, \sqsubset$

34. 함수 $f(x)=\begin{cases} ax^2-4x+3 & (x \geq 1) \\ x^3-2x^2+bx & (x < 1) \end{cases}$ 가 $x=1$ 에서 미분가능 할 때, 상수 a, b 의 합 a^2+b^2 의 값을 구하시오.

35. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때,
 $-1 < x < 5$ 에서 미분가능하지 않은 점의 개수를 구하시오.



36. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가
 오른쪽 그림과 같을 때, 구간
 $(-1, 5)$ 에서 함수 $f(x)$ 에 대한 설명
 중 옳지 않은 것은?



- ① 함수 $f(x)$ 가 불연속인 점은 2개다.
 ② 함수 $f(x)$ 가 미분가능하지 않은 점은 3개다.
 ③ $f'(x)=0$ 인 점은 2개이다.
 ④ $f'(0) > 0$ 이다.
 ⑤ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 가 존재한다.

37. 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y = (x - x^2)(2x - x^3)$

(2) $y = (x^3 + x - 1)(2x + 3)$

(3) $y = (x^2 + 1)(x^5 - 3x^3 + x)$

(4) $y = (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$

38. 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여

$f(x) = (x^2 + 1)g(x)$ 이고 $g(1) = -1, g'(1) = 2$ 일 때, $f'(1)$ 의
 값을 구하시오.

39. 함수 $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - ax^3 + \frac{5}{2}x^2 + x$ 에 대하여 $f'(1) = 0$ 일
 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

40. 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} + 3x^2 - 4}{x - 1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^{10} + 2x - 3}$

41. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + x^2 + x - 3}{x - 1} = 6$ 이 성립하도록 하는 자연수 n 의
 값을 구하시오.

42. 함수 $f(x) = (x^2 + x + 1)(ax + b)$ 가 두 조건

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 12, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{f(x) - f(1)} = 1$$

을 만족할 때, $f'(3)$ 의 값을 구하시오.

43. 함수 $f(x) = x^5 + ax^2 + bx + 2$ 가 두 조건

$$f(1) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \frac{9}{2}$$

를 만족할 때, 상수 a, b 에 대하여 $-ab$ 의 값을 구하시오.

44. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 - 5}{x - 1}$ 의 값을 구하시오.

45. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 4$ 가 $(x - 2)^2$ 으로 나누어 떨어질 때, $b - a$ 의 값을 구하시오.

46. 다항식 $x^{100} + ax + b$ 가 $(x - 1)^2$ 을 인수로 가질 때, $b - a$ 의 값을 구하시오.

47. 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x, y 에 대하여

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

를 만족하고 $f'(0) = 2$ 일 때, $f'(1)$ 의 값을 구하시오.

48. 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x, y 에 대하여

$$f(x - y) = f(x) - f(y)$$

를 만족하고 $f'(1) = -1$ 일 때, $f'(0)$ 의 값을 구하시오.

정답 및 풀이

1) 정답 (1)3 (2)-4

$$(1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{6-0}{2} = 3$$

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} = \frac{2-6}{1} = -4$$

2) 정답 1

함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 에서 x 의 값이 a 에서 2 까지 변할 때의

평균변화율은 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(a)}{2-a} (\because a < 2)$

$$= \frac{(2^2 + 2 \cdot 2) - (a^2 + 2a)}{2-a} \\ = \frac{-a^2 - 2a + 8}{2-a} = \frac{a^2 + 2a - 8}{a-2} = \frac{(a+4)(a-2)}{a-2}$$

$$= a+4 (\because a < 2)$$

주어진 조건에서 평균변화율이 5 이므로

$$a+4=5 \quad \therefore a=1$$

3) 정답 2

함수 $f(x) = x^2 + x + 1$ 에서 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할때의

평균변화율은 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$= \frac{(b^2 + b + 1) - (a^2 + a + 1)}{b-a} = \frac{(b^2 - a^2) + (b-a)}{b-a}$$

$$= \frac{(b-a)(b+a) + (b-a)}{b-a} = \frac{(b-a)(b+a+1)}{b-a}$$

$$= a+b+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 함수 $y=f(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수 $f'(1)$ 은

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(1+\Delta x)^2 + (1+\Delta x) + 1\} - (1^2 + 1 + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(\Delta x + 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 3) = 3$$

주어진 조건에서 $\textcircled{1} = \textcircled{2}$ 이므로 $a+b+1=3$

$$\therefore a+b=2$$

4) ⑤

5) 정답 6

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a) \text{ 이므로}$$

$$(\text{준식}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+3\Delta x) - f(1)}{3\Delta x} \cdot 3$$

$$= 3 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+3\Delta x) - f(1)}{3\Delta x} = 3f'(1) = 6$$

6) 정답 9

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 3 \text{ 이므로}$$

$$(\text{준식}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h}$$

$$= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}$$

$$= 2f'(1) + f'(1) = 3f'(1)$$

$$\therefore 3f'(1) = 3 \cdot 3 = 9$$

7) 정답 2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$= f'(1) \cdot \frac{1}{3} = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

8) 정답 ②

ㄱ. (거짓) 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기가

1 보다 크다.

$$\text{즉 } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 1$$

$$\therefore b - a < f(b) - f(a)$$

ㄴ. (참) 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기가 점 $(b, f(b))$ 에서의

접선의 기울기보다 작다.

$$\therefore f'(a) < f'(b)$$

ㄷ. (거짓) 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기가

두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기보다 작다.

$$\therefore f'(a) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ 뿐이다.

9) (1) 연속 (2) 미분불능

10) (1) $x=0$, 불연속 (2) $x=0$, 불연속 (3) $x=\pm 2$, 연속이지만 미분계수가 없다

11) 연속: (2), (3), (4) 미분가능: (3)

미분법

12) 정답 -12

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1+0} (x^3 + ax^2) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (bx + 3)$ 이므로

$$1 + a = b + 3 \text{에서 } b = a - 2 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2ax & (x > 1) \\ b & (x < 1) \end{cases}$ 이고 $f'(1)$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1+0} (3x^2 + 2ax) = \lim_{x \rightarrow 1-0} b$$

$$\therefore 3 + 2a = b \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -5$, $b = -7$

$$\therefore a + b = -12$$

13) 정답 ③

$x=a$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수를 찾으려 한다.

- ① 모든 실수 x 에 대하여 미분가능하다.
 - ② $x=0$ 에서 $f(0)$ 가 존재하지 않으므로 불연속이다.
 - ③ $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.
 - ④ 모든 실수 x 에 대하여 미분가능하다.
 - ⑤ $x=2$ 에서 함수값 $f(2)$ 가 존재하지 않으므로 불연속이다.
- 따라서, 반례로 적당한 것은 ③이다.

14) 정답 5

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $x=0$, $x=2$ 인 점에서

불연속이므로 $m=2$

또, $x=-1$, $x=0$, $x=2$ 인 점에서 미분가능하지 않으므로

$$n=3$$

$$\therefore m+n=2+3=5$$

15) 정답: 풀이참조

$$(1) y' = 4\{(3x^2)' - (4x)' + (2)'\}$$

$$= 4(3 \cdot 2x - 4 \cdot 1 + 0)$$

$$= 24x - 16$$

$$(2) y' = (-4x^3)' - (x^2)' - (-1)'$$

$$= -4 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x - 0$$

$$= -12x^2 + 4x$$

$$(3) y' = (-7x^5)' - (2x^3)' + (5)'$$

$$= -7 \cdot 5x^4 - 2 \cdot 3x^2 + 0$$

$$= -35x^4 - 6x^2$$

$$(4) y' = \left(\frac{1}{3}x^6\right)' - \left(\frac{3}{4}x^4\right)' + \left(\frac{1}{2}x^2\right)' + (1)'$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 6x^5 - \frac{3}{4} \cdot 4x^3 + \frac{1}{2} \cdot 2x + 0$$

$$= 2x^5 - 3x^3 + x$$

16) 정답(1) $-15x^2 - 5$

$$(2) -6x^2 + 10x - 3$$

$$(3) -15(-5x+1)^2$$

$$(4) 3(-3x^2+5x+2)^2(-6x+5)$$

$$(5) 2(x+2)(6x^2+6x-1)$$

$$(6) (2x-3)(42x-17)$$

$$(1) y' = (-5x)'(x^2+1) + (-5x)(x^2+1)'$$

$$= -5(x^2+1) - 10x^2$$

$$= -15x^2 - 5$$

$$(2) y' = (-x+2)'(2x^2-x+1) + (-x+2)(2x^2-x+1)'$$

$$= -(2x^2-x+1) + (-x+2)(4x-1)$$

$$= -6x^2 + 10x - 3$$

$$(3) y' = \{(-5x+1)^3\}'$$

$$= 3(-5x+1)^2(-5x+1)'$$

$$= -15(-5x+1)^2$$

$$(4) y' = \{(-3x^2+5x+2)^3\}'$$

$$= 3(-3x^2+5x+2)^2(-3x^2+5x+2)'$$

$$= 3(-3x^2+5x+2)^2(-6x+5)$$

$$(5) y' = \{(x+2)^2\}'(3x^2-1) + (x+2)^2(3x^2-1)'$$

$$= 2(x+2)(3x^2-1) + (x+2)^2 \cdot 6x$$

$$= (x+2)(12x^2+12x-2)$$

$$= 2(x+2)(6x^2+6x-1)$$

$$(6) y' = (7x+1)'(2x-3)^2 + (7x+1)(3x^2-1)'$$

$$= 7(2x-3)^2 + (7x+1) \cdot 2(2x-3) \cdot (2x-3)'$$

$$= 7(2x-3)^2 + 4(7x+1)(2x-3)$$

$$= (2x-3)(42x-17)$$

$$17) \text{ 정답 } -\frac{13}{2}$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 3 \text{ 에서 } f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

$$\text{따라서, } f'(4) = 48 + 8a = -4, 8a = -52$$

$$\therefore a = -\frac{13}{2}$$

18) 정답 -8

$$f(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 \text{ 으로 놓으면 } f(-1) = 1$$

$$\therefore (\text{준식}) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1)$$

$$f'(x) = 10x^9 + 9x^8 + 8x^7 + 7x^6 + 6x^5 \text{ 에서}$$

$$f'(-1) = -8$$

$$19) 8x - 8$$

20) 정답 (1) 9 (2) 6

(1) x 의 값이 1에서 5까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$ 의

$$\begin{aligned}\text{평균변화율은 } \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(5)-f(1)}{5-1} \\ &= \frac{(5^2+3 \cdot 5)-(1^2+3 \cdot 1)}{4} = \frac{40-4}{4} = \frac{36}{4} = 9\end{aligned}$$

(2) x 의 값이 0에서 2까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$ 의

$$\text{평균변화율은 } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{(2^2+2 \cdot 2)-0}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

21) 정답 2

함수 $f(x)=x^2$ 에 대하여 x 의 값이 2에서 $2+h$ 까지 변할 때의 평균변화율이 6이므로

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2} = \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \frac{h^2+4h}{h} \\ &= \frac{h(h+4)}{h} = h+4=6\end{aligned}$$

$$\therefore h=2$$

22) 정답 2

함수 $f(x)$ 에 대하여 x 의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균

$$\begin{aligned}\text{변화율은 } \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(3)-f(1)}{3-1} \\ &= \frac{(3^2-5 \cdot 3+4)-(1^2-5 \cdot 1+4)}{3-1}\end{aligned}$$

$$= \frac{-2-0}{2} = -1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 의 $x=c$ 에서의 순간변화율(미분계수)은

$$\begin{aligned}f'(c) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(c+\Delta x)^2-5(c+\Delta x)+4\}-(c^2-5c+4)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2+2c\Delta x-5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(\Delta x+2c-5)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x+2c-5) = 2c-5 \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

주어진 조건에서 $\textcircled{1}=\textcircled{2}$ 이므로

$$-1=2c-5 \quad \therefore c=2$$

23) 정답 1

구간 $[1, a]$ 에서 $f(x)$ 의 평균 변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(a)-f(1)}{a-1} &= \frac{(a^3-1)-(1^3-1)}{a-1} = \frac{a^3-1}{a-1} \\ &= \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a-1} = a^2+a+1\end{aligned}$$

또한 $f(x)=x^3-1$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3-1-(1^3-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h^2+3h+3)}{h} = 3\end{aligned}$$

이 때, $a^2+a+1=3$

$$a^2+a-2=0$$

$$(a-1)(a+2)=0$$

따라서 $a>0$ 이므로 $a=1$

24) 정답 (1) -2

(2) 1

(1) 주어진 식을 변형하면

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a)-f(a+h)}{h} &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{-h} \\ &= -f'(a) = -2 \quad (\because f'(a)=2)\end{aligned}$$

(2) 주어진 식의 분모, 분자에 각각 $\frac{1}{2}$ 을 곱하면

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{4h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{2h} \times \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}f'(a) &= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad (\because f'(a)=2)\end{aligned}$$

25) 정답 6

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3+6\Delta x)-f(3)}{6\Delta x} \cdot 6 \\ &= 6 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3+6\Delta x)-f(3)}{6\Delta x} \\ &= 6 \cdot f'(3) = 6\end{aligned}$$

26) 정답 (1) -1

(2) 0

(1) 주어진 식의 분자에 $af(a)$ 를 빼고 더하면

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow 1} \frac{af(1)-f(a)}{a-1} &= \lim_{a \rightarrow 1} \frac{af(1)-af(a)+af(a)-f(a)}{a-1} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} \frac{-af(a)-f(1)+(a-1)f(a)}{a-1} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} \left[\frac{-a\{f(a)-f(1)\}}{a-1} + f(a) \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} (-a) \cdot \lim_{a \rightarrow 1} \frac{f(a)-f(1)}{a-1} + \lim_{a \rightarrow 1} f(a) \\ &= -f'(1)+f(1) \\ &= -2+1=-1 \quad (\because f(1)=1, f'(1)=2)\end{aligned}$$

(2) 주어진 식의 분자에 $a^2f(a)$ 를 빼고 더하면

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow 1} \frac{a^2f(1)-f(a)}{a-1} &= \lim_{a \rightarrow 1} \frac{a^2f(1)-a^2f(a)+a^2f(a)-f(a)}{a-1} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} \frac{-a^2f(a)-f(1)+(a^2-1)f(a)}{a-1} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} \left[\frac{-a^2\{f(a)-f(1)\}}{a-1} + \frac{(a-1)(a+1)f(a)}{a-1} \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} (-a^2) \cdot \lim_{a \rightarrow 1} \frac{f(a)-f(1)}{a-1} + \lim_{a \rightarrow 1} (a+1)f(a) \\ &= -f'(1)+2f(1) \\ &= -2+2=0 \quad (\because f(1)=1, f'(1)=2)\end{aligned}$$

27) 정답 9

(준식)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1} \cdot (x^2+x+1) = f'(1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+1)$$

$$= 3 \cdot 3 = 9$$

28) 정답 1

주어진 식의 분자에 $2f(2)$ 를 빼고 더하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 2f(2) + 2f(2) - xf(2)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{2\{f(x) - f(2)\}}{(x-1)(x-2)} + \frac{(x-2)f(2)}{(x-1)(x-2)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \cdot \frac{2}{x-1} \right\} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2)}{x-1} \\ &= 2f'(2) - f(2) \\ &= 2 \cdot 2 - 3 = 1 \quad (\because f(2) = 3, f'(2) = 2) \end{aligned}$$

29) 정답 4

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3 \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때, (분모)} \rightarrow 0 \text{이므로}$$

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0 \text{에서 } f(2) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2) = 3 \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또한 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{4} \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} \{g(x) - 2\} = g(2) - 2 = 0 \text{에서 } g(2) = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = g'(2) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ \therefore g'(2) &= 1 \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } f'(2) + g'(2) = 3 + 1 = 4$$

30) 정답 ②

함수 $f(x) = x^2$ 에 대하여 $a < b < c$ 일 때, $f(x) = x^2$

$$\text{오른쪽 그림에서 } P = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{는}$$

직선 AB의 기울기

$$Q = \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \text{는 직선 CB의 기울기}$$

$R = f'(b)$ 는 점 B에서의 접선의 기울기이므로 P, Q, R의
대소 관계는 $P < Q < R$ 이다.

31) 정답 $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} |x-1| = 0 \text{이고, } f(1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

따라서 함수 $f(x) = |x-1|$ 은 $x=1$ 에서 연속이다.

$$(ii) f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geq 1) \\ 1-x & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$x=1$ 에서의 우미분계수를 구하면

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{(1+\Delta x) - 1 - (1-1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \end{aligned}$$

$x=1$ 에서의 좌미분계수를 구하면

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{1 - (1+\Delta x) - (1-1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

이므로 함수 $f(x) = |x-1|$ 은 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $f(x) = |x-1|$ 은 $x=1$ 에서 연속이지만

미분가능하지 않다.

32) 정답 $x=1$ 에서 연속이고 미분가능하다.

(i) $x=1$ 에서의 $y=f(x)$ 의 우극한과 좌극한을 구하면

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 2x^3 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (6x-4) = 2$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \text{이고 } f(1) = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

(ii) $x=1$ 에서의 우미분계수를 구하면

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{2(1+\Delta x)^3 - 2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{2\{1 + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\} - 2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{2\Delta x\{3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2\}}{\Delta x} = 1 \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} 2\{3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2\} = 6 \end{aligned}$$

$x=1$ 에서 좌미분계수를 구하면

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{6(1+\Delta x) - 4 - (6-4)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{6\Delta x}{\Delta x} = 6 \end{aligned}$$

좌미분계수와 우미분계수가 같으므로 미분계수 $f'(1)$ 이 존재한다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이고 미분가능하다.

33) 정답 ②

$$\neg. f(x) = |x^2 - 1| \text{이라 하면}$$

(i) $x=1$ 에서의 우미분계수를 구하면

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|(1+h)^2|-1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h^2+2h|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h||h+2|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h(h+2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} (h+2) = 2\end{aligned}$$

(ii) $x=1$ 에서의 좌미분계수를 구하면

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|(1+h)^2|-1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h^2+2h|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h||h+2|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h(h+2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow -0} (h+2) = -2\end{aligned}$$

좌미분계수와 우미분계수가 같지 않으므로 미분계수 $f'(1)$ 은 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $g(x) = (x-1)^2$ 이라 하면

(i) $x=1$ 에서의 우미분계수를 구하면

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{g(1+\Delta x)-g(1)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{(1+\Delta x-1)^2-(1-1)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \Delta x = 0\end{aligned}$$

(ii) $x=1$ 에서 좌미분계수를 구하면

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{g(1+\Delta x)-g(1)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{(1+\Delta x-1)^2-(1-1)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \Delta x = 0\end{aligned}$$

좌미분계수와 우미분계수가 같으므로 미분계수 $g'(1)$ 이 존재한다.

따라서 함수 $g(x) = (x-1)^2$ 은 $x=1$ 에서 미분가능하다.

$$\text{ㄷ. } h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & (x \neq 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases} \text{이라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \text{이고, } h(1) = 1$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) \neq h(1)$

따라서 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이므로 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 미분가능한 것은 ㄴ뿐이다.

34) 정답 18

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

즉, $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 에서

$$a-4+3 = 1-2+b \quad \therefore a=b \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

또, $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 1+0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{h \rightarrow 1+0} \frac{ax^2-4x+3-(a-4+3)}{x-1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 1+0} \frac{a(x^2-1)-4(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 1+0} \frac{(x-1)\{a(x+1)-4\}}{x-1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 1+0} \{a(x+1)-4\} = 2a-4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 1-0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{h \rightarrow 1-0} \frac{x^3-2x^2+bx-(1-2+b)}{x-1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 1-0} \frac{x^3-2x^2+bx+(1-b)}{x-1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 1-0} \frac{(x-1)(x^2-x-1+b)}{x-1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 1-0} (x^2-x-1+b) \\ &= -1+b\end{aligned}$$

에서 $2a-4 = -1+b$

$$\therefore 2a-3 = b \quad \dots\dots\textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a=3, b=3$

$$\therefore a^2+b^2 = 3^2+3^2 = 18$$

35) 정답 3개

주어진 함수의 그래프 위의 불연속인 점과 뾰족한 점에서는 미분가능하지 않다. 따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $x=1, x=4$ 에서 그래프가 끊어져 있고, $x=2$ 에서는 그래프가 뾰족하므로 미분가능하지 않다. 따라서 미분가능하지 않은 점은 3개이다.

36) 정답 ③

① 함수 $f(x)$ 는 $x=3, x=4$ 에서 불연속이므로 불연속인 점은 2개이다.

② 불연속인 점과 뾰족한 점에서는 미분가능하지 않으므로 함수 $f(x)$ 가 미분가능하지 않은 점은 $x=2, x=3, x=4$ 일때의 3개이다.

③ $f'(x)=0$ 인 점은 구간 $(0, 2)$ 에서 2개 존재하고, 구간 $(2, 3)$ 에서 1개 존재하므로 모두 3개이다.

④ $X=0$ 에서의 접선의 기울기는 양수이므로 $F'(0) > 0$ 이다.

⑤ $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 가 존재한다.

$$37) \text{정답 (1) } y' = 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x$$

$$(2) y' = 8x^3 + 9x^2 + 4x + 1$$

$$(3) y' = 7x^6 - 10x^4 - 6x^2 + 1$$

$$(4) y' = 4x^3 - 4x$$

(1) $y = (x-x^2)(2x-x^3)$ 을 미분하면

$$\begin{aligned} y' &= (x-x^2)'(2x-x^3) + (x-x^2)(2x-x^3)' \\ &= (1-2x)(2x-x^3) + (x-x^2)(2-3x^2) \\ &= (2x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x) + (3x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x) \\ &= 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x \end{aligned}$$

(2) $y = (x^3+x-1)(2x+3)$ 을 미분하면

$$\begin{aligned} y' &= (x^3+x-1)'(2x+3) + (x^3+x-1)(2x+3)' \\ &= (3x^2+1)(2x+3) + (x^3+x-1) \cdot 2 \\ &= (6x^3+9x^2+2x+3) + (2x^3+2x-2) \\ &= 8x^3+9x^2+4x+1 \end{aligned}$$

(3) $y = (x^2+1)(x^5-3x^3+x)$ 을 미분하면

$$\begin{aligned} y' &= (x^2+1)'(x^5-3x^3+x) + (x^2+1)(x^5-3x^3+x)' \\ &= 2x(x^5-3x^3+x) + (x^2+1)(5x^4-9x^2+1) \\ &= (2x^6-6x^4+2x^2) + (5x^6-4x^4-8x^2+1) \\ &= 7x^6-10x^4-6x^2+1 \end{aligned}$$

(4) $y = (x^2+2x+1)(x^2-2x+1)$ 을 미분하면

$$\begin{aligned} y' &= (x^2+2x+1)'(x^2-2x+1) + (x^2+2x+1)(x^2-2x+1)' \\ &= (2x+2)(x^2-2x+1) + (x^2+2x+1)(2x-2) \\ &= (2x^3-2x^2-2x+2) + (2x^3-2x^2-2x-2) \\ &= 4x^3-4x \end{aligned}$$

38) 정답 2

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2+1)' \cdot g(x) + (x^2+1) \cdot g'(x) \\ &= 2xg(x) + (x^2+1)g'(x) \\ \therefore f'(1) &= 2g(1) + (1^2+1)g'(1) \\ &= 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

39) 정답 3

함수 $f(x)$ 를 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{3}{4}x^4\right)' - (ax^3)' + \left(\frac{5}{2}x^2\right)' + (x)' \\ &= \frac{3}{4} \cdot 4x^3 - a \cdot 3x^2 + \frac{5}{2} \cdot 2x + 1 \\ &= 3x^3 - 3ax^2 + 5x + 1 \\ \therefore f'(1) &= 3 - 3a + 5 + 1 = 0 \\ 3a &= 9 \quad \therefore a = 3 \end{aligned}$$

40) 정답 (1) 16 (2) $\frac{1}{12}$

(1) $f(x) = x^{10} + 3x^2$ 으로 놓으면 $f(1) = 1 + 3 = 4$

$x^{10} + 3x^2 - 4 = f(x) - f(1)$ 이므로 주어진 식을 변형하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} + 3x^2 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

함수 $f(x)$ 를 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10x^9 + 6x \\ \therefore (\text{준식}) &= f'(1) = 10 + 6 = 16 \end{aligned}$$

(2) $f(x) = x^{10} + 2x$ 로 놓으면 $f(1) = 1 + 2 = 3$

$x^{10} + 2x - 3 = f(x) - f(1)$ 이므로 주어진 식을 변형하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^{10} + 2x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{f(x) - f(1)} \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1) - f(1)}{x - 1}} = \frac{1}{f'(1)} \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 를 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10x^9 + 2 \\ \therefore (\text{준식}) &= \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{10 + 2} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

41) 정답 3

$f(x) = x^n + x^2 + x$ 로 놓으면 $f(1) = 3$

$x^n + x^2 + x - 3 = f(x) - f(1)$ 이므로 주어진 식을 변형하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + x^2 + x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 6$$

함수 $f(x)$ 를 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1} + 2x + 1 \\ f'(1) &= 6 \text{이므로} \\ f'(1) &= n + 2 + 1 = 6 \\ \therefore n &= 3 \end{aligned}$$

42) 정답 27

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 12 \text{에서 } f'(2) = 12 \dots \text{㉠}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{f(x) - f(1)} = 1 \text{을 변형하면}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{f(x) - f(1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x - 1}{f(x) - f(1)} \cdot (x^2 + x + 1) \right\} \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) \\ &= \frac{1}{f'(1)} \cdot 3 = 1 \\ \therefore f'(1) &= 3 \dots \text{㉡} \end{aligned}$$

$f(x) = (x^2 + x + 1)(ax + b)$ 를 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + x + 1)'(ax + b) + (x^2 + x + 1)(ax + b)' \\ &= (2x + 1)(ax + b) + (x^2 + x + 1) \cdot a \end{aligned}$$

㉠, ㉡에 의해

$$\begin{aligned} f'(1) &= 3(a + b) + 3a = 3 \\ \therefore 2a + b &= 1 \dots \text{㉢} \\ f'(2) &= 5(2a + b) + 7a = 12 \\ \therefore 17a + 5b &= 12 \dots \text{㉣} \end{aligned}$$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = -1$$

따라서 $f(x) = (x^2 + x + 1)(x - 1) = x^3 - 1$ 이므로



$$f'(x) = 3x^2 \quad \therefore f'(3) = 27$$

43) 정답 6

$f(x) = x^5 + ax^2 + bx + 2$ 에서 $f(1) = 4$ 이므로

$$1 + a + b + 2 = 4$$

$$\therefore a + b = 1 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \frac{9}{2} \text{를 변형하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - (1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1}$$

$$f'(1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\therefore f'(1) = 9 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

함수 $f(x)$ 를 미분하면

$$f'(x) = 5x^4 + 2ax + b$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } f'(1) = 5 + 2a + b = 9$$

$$\therefore 2a + b = 4 \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉢}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 3, b = -2$$

$$\therefore -ab = -3 \cdot (-2) = 6$$

44) 정답 40

$f(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6$ 으로 놓으면 $f(1) = 5$

$$\therefore (\text{준식}) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$$

이 때, $f'(x) = 10x^9 + 9x^8 + 8x^7 + 7x^6 + 6x^5$ 이므로

$$\therefore f'(1) = 40$$

45) 정답 3

다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 4$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눌 때의 몫을

$Q(x)$ 라 하면 나머지가 0이므로

$$x^3 + ax^2 + bx + 4 = (x-2)^2 Q(x) \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$\textcircled{㉠}$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$8 + 4a + 2b + 4 = 0 \quad \therefore 2a + b = -6 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + 2ax + b = 2(x-2)Q(x) + (x-2)^2 Q'(x)$$

이 식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$12 + 4a + b = 0 \quad \therefore 4a + b = -12 \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉡}$, $\textcircled{㉢}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -3, b = 0$$

46) 정답 199

다항식 $x^{100} + ax + b$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$

라 하면 나머지가 0이므로

$$x^{100} + ax + b = (x-1)^2 Q(x) \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$\textcircled{㉠}$ 의 양변에 $x=1$ 를 대입하면

$$1 + a + b = 0 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$100x^{99} + a = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x)$$

이 식의 양변에 $x=1$ 를 대입하면

$$100 + a = 0 \quad \therefore a = -100 \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$a = -100 \text{을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } b = 99$$

$$\therefore b - a = 99 - (-100) = 199$$

47) 정답 2

주어진 식에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) \text{에서 } f(0) = 0$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 2$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 2$$

48) 정답 -1

주어진 식에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) - f(0) \text{에서 } f(0) = 0$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(h) - f(1)}{-h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = -1$$

$$\therefore f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = -1$$